Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 16. Dezember 2011

# Topologie, Übungsblatt 10

Abgabe bis Freitag, den 13. Januar 2012, 13:15 Uhr

**Aufgabe 41 (1+1+1 Punkte)** Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\infty \notin X$. Es sei $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ und $\widehat{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T} \cup \left\{\widehat{X} \setminus K : K \text{ kompakt}\right\}$. Zeigen Sie:

(a) Mit $\widehat{\mathfrak{T}}$ ist $\widehat{X}$ ein kompakter Hausdorff-Raum.

(b) Die Relativtopologie auf $X \subset \widehat{X}$ ist $\mathfrak{T}$.

(c) Genau dann ist $X$ dicht in $\widehat{X}$, wenn $X$ nicht kompakt ist.

**Aufgabe 42 (2+2 Punkte)**

Es seien $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C(X, \mathbb{C})$, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Ferner seien zu $\varepsilon > 0$

$$P_m(\varepsilon) = \{x \in X : |f(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon\}$$

und $G(\varepsilon) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m(\varepsilon)^\circ$, $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(\frac{1}{n})$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $G$ ist die Menge der Stetigkeitsstellen von $f$.

(b) Die Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$ ist eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen.

**Aufgabe 43 (2+2+1 Punkte)** Es sei $C^\infty([0,1])$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit der Metrik:

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, ||f^{(n)} - g^{(n)}||_\infty\right\}$$

Zeigen Sie:

(a) Der Raum $C^\infty([0,1])$ ist metrisch und vollständig.

(b) Die Menge der Funktionen $f \in C^\infty([0,1])$, die an irgendeiner Stelle $b \in (0,1)$ analytisch sind, ist in

$$\bigcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1], c \in \mathbb{N}} T(a,c)$$

mit

$$T(a,c) = \{f \in C^\infty([0,1]) : |f^{(k)}(a)| \leq k! c^k \forall k \in \mathbb{N}\}$$

enthalten. Jedes $T(a,c)$ ist nirgends dicht.

Somit ist die Menge der Funktionen, die an einer Stelle $b \in (0,1)$ analytisch sind, eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen.

*Hinweis*: Sie können für eine in $a \in (0,1)$ analytische Funktion $f \in C^\infty([0,1])$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ (|f^{(k)}(a)|/k!)^{(1/k)} \right\} = c < \infty$$

verwenden.

(c) Die Menge der Funktionen in $C^\infty([0,1])$, die an keiner Stelle analytisch sind, ist keine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen.