Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 13. Januar 2012

Topologie, Übungsblatt 11

Abgabe bis Freitag, den 20. Januar 2012, 13:15 Uhr

Aufgabe 44 (1+2+1 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Der topologische Raum $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit der Topologie $\mathfrak{T}$ mit der Basis

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{T}_{\text{nat}} \cup \{(a, +\infty) \cup \{+\infty\} : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \cup \{-\infty\} : b \in \mathbb{R}\}$$

ist normal und regulär.

(b) Die obere Halbebene $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ mit der Topologie $\mathfrak{T}$ mit der Basis

$$\mathfrak{B} = \left\{B_r^d(x,y) : (x,y) \in H, 0 < r \leq y\right\} \cup \left\{B_r^d(x,r) \cup \{(x,0)\} : x \in \mathbb{R}, r > 0\right\}$$

ist regulär, aber nicht normal, wobei d die euklidische Metrik auf $H \subset \mathbb{R}^2$ ist.

(c) Für X überabzählbar und $\mathfrak{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ abzählbar}\}$, die koabzählbare Topologie auf X, ist der topologische Raum $(X, \mathfrak{T})$ weder normal noch regulär.

Aufgabe 45 (1+1 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist $(X, \mathfrak{T})$ ein (T_1)-Raum, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ und jeden Häufungspunkt x von A in jeder Umgebung von x unendlich viele Punkte von A liegen.

(b) $(X, \mathfrak{T})$ ist (T_2)-Raum $\Leftrightarrow \{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{U}$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 46 (4 Punkte) (Beispiel für: Ein (T_2)-Raum erfüllt nicht notwendigerweise das Trennungsaxiom (T_3) und ist somit auch nicht regulär.)

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $\mathfrak{B}_x$ die Familie aller offenen Intervalle, die x enthalten, und $\mathfrak{B}_0$ sei die Familie aller Mengen der Form:

$$U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} (\varepsilon > 0)$$

Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathfrak{B}_x$ Basis eines Filters $\mathfrak{F}_x$, es gibt eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{U}_x = \mathfrak{F}_x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$ ist (T_2)-, aber kein (T_3)-Raum. (Betrachte $x = 0$.)

Aufgabe 47 (2 Punkte) Es seien $(X, \mathfrak{T})$ und $(X', \mathfrak{T}')$ homöomorphe topologische Räume. Zeigen Sie: Der Raum $(X, \mathfrak{T})$ ist ein (T_i)-Raum genau dann, wenn $(X', \mathfrak{T}')$ ein (T_i)-Raum ist.