Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 20. Januar 2012

Topologie, Übungsblatt 12

Abgabe bis Freitag, den 27. Januar 2012, 13:15 Uhr

Aufgabe 48 (1+1+1 Punkte) Es seien X, Y normale Räume und $\varphi : X \to Y$ stetig. Die Abbildung φ^* sei durch $\varphi^* : C(Y, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})$, $f \mapsto f \circ \varphi$ definiert. Beweisen Sie:

(a) $\varphi(X)$ dicht in $Y \Leftrightarrow \varphi^*$ injektiv; (*Hinweis*: Lemma von Urysohn!)

(b) φ^* surjektiv $\Rightarrow \varphi$ injektiv.

(c) φ injektiv und abgeschlossen $\Rightarrow \varphi^*$ surjektiv. (*Hinweis*: Lemma von Tietze!)

Aufgabe 49 (2+1 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge A eines lokalkompakten T_2-Raumes X ist genau dann lokalkompakt, wenn sie offen in ihrem Abschluß ist.

(b) (Urysohns Lemma für lokalkompakte Räume.) Es seien X lokalkompakt, $K \subset X$ kompakt und $V \supseteq K$ offen. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_K \equiv 1$, $f|_{\complement V} \equiv 0$. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Alexandroff-Kompaktifizierung von X.)

Aufgabe 50 (3 Punkte) Es sei X ein normaler topologischer Raum. Es seien $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 1$, abgeschlossene Teilmengen von X mit der Eigenschaft:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset$$

Zeigen Sie: Es gibt offene Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ von X mit:

$$A_k \subset U_k, 1 \leq k \leq n, \bigcap_{k=1}^{n} U_k = \emptyset$$

Aufgabe 51 (3 Punkte) Es sei X ein topologischer Raum.

Zeigen Sie: X ist genau dann normal, wenn es zu jeder endlichen Überdeckung $U_1, \ldots, U_n$ von X mit offenen Mengen stetige Abbildungen $f_k : X \to [0, 1]$ gibt mit:

(a) $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1$ für alle $x \in X$,

(b) $f_k(x) = 0 \forall x \in \complement_X U_k$, $1 \leq k \leq n$.