Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 27. Januar 2012

Topologie, Übungsblatt 13

Abgabe bis Freitag, den 3. Februar 2012, 13:15 Uhr

Aufgabe 52 (2+1 Punkte) Es sei $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x}\right\}$ eine Hyperbel mit der Menge der Asymptoten $B = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$.

(a) Begründen Sie (nicht wie in Teil b): Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ mit $f^{-1}(\{0\}) = A$ und $f^{-1}(\{1\}) = B$.

(b) Geben Sie eine derartige Funktion konkret an.

Aufgabe 53 (1+1+1 Punkte) (a) Es sei X normal, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie: Es gibt eine stetige Fortsetzung von f auf X.

(b) Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes X und $f : A \to S^n$ stetig. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von A und eine stetige Fortsetzung $F : U \to S^n$.

(c) Weisen Sie an einem Beispiel für $n = 0$ nach: Man kann f im allgemeinen nicht zu einer stetigen Abbildung $F : X \to S^n$ fortsetzen.

Aufgabe 54 (4 Punkte) Zeigen Sie: Ein topologischer Hausdorff-Raum $(X, \mathfrak{T})$ ist genau dann kompakt, wenn er homöomorph zu einer abgeschlossenen Menge in einem Produkt von kompakten Intervallen ist.