Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. Oliver Sander
M. Sc. Katja Hanowski
Dipl.-Math. Jörg Vautz

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Aachen, den 08. Oktober 2012

1. Übung zur Analysis für Informatiker

Abgabe: Freitag, 19. Oktober 2012, 10:00

Abgaben zum Übungsblatt sind bis Freitag, den 19.10.2012 um 10:00 Uhr in den Übungskasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls A für Mathematik (Hauptgebäude Raum 155) einzuwerfen. Die Übungsaufgaben sollen nach Möglichkeit in Zweiergruppen bearbeitet werden. Abgaben von Einzelpersonen sind zugelassen, Abgaben von mehr als zwei Personen werden nicht angenommen. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf die Abgabe. Falls Sie zu zweit abgeben, schreiben Sie Name und Matrikelnummer beider Teilnehmer auf die Abgabe. Falls Ihre Abgabe mehrere Seiten umfasst heften Sie diese bitte zusammen.

Aufgabe 1 Beweisen Sie Lemma 1.1 aus dem Skript, d.h. zeigen Sie dass gilt:

(a) $1 > 0$, $\boxed{1}$

(b) $x < y \iff -x > -y$, $\boxed{2}$

(c) $x < y$ und $a < 0 \implies a \cdot x > a \cdot y$, $\boxed{1}$

(d) $x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0$, $\boxed{1}$

(e) $x > y$ und $x > 0$ und $y > 0 \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$, $\boxed{1}$

(f) $x > y$ und $w \geq z \implies x + w > y + z$. $\boxed{2}$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die nachfolgenden Werte mit Beweis oder zeigen Sie, dass sie nicht existieren:

(a) Das Supremum der Menge $\{3, 7, 12, 13\}$, $\boxed{1}$

(b) das Supremum der Menge $\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, $\boxed{3}$

(c) das Infimum der Menge $\{n - n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 3 Geben Sie (ohne Beweis) alle Teilmengenbeziehungen zwischen den folgenden Mengen an:

$$A = \{-1, 4, 2, 87\} \qquad B = \mathbb{N}$$
$$C = \{2, 4\} \qquad D = \mathbb{Z}$$
$$E = \left\{\frac{1}{2}\right\} \qquad F = \left\{\frac{2}{4}, 14, \frac{7}{8}\right\}$$

$\boxed{1}$

Aufgabe 4 Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) *Geometrische Summenformel:* Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

$\boxed{2}$

(b) *Binomische Formel:* Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$\boxed{3}$

Hinweis Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Beziehung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, 2, \dots, n$ gilt

Aufgabe 5 Sind folgende Mengen offen und/oder abgeschlossen? Sind sie kompakt? Beweisen Sie!

(a) $[1, 7]$ $\boxed{3}$

(b) $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\boxed{3}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ $\boxed{3}$

$\boxed{\Sigma = 30}$