LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 8. Oktober 2012

1. Übung zur Vorlesung Analysis III

Abgabe bis Dienstag, den 16. Oktober 2012, 11:30 Uhr

Tutoraufgaben

Die folgenden Tutoraufgaben dienen der Vorbereitung der schriftlich abzugebenden Aufgaben. Sie werden in den Tutorgruppen besprochen.

Tutoraufgabe 1 Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$$

ist in jedem Punkt lokal umkehrbar.

Ist f global umkehrbar, d. h. gibt es ein $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $f \circ g = \mathrm{id}$?

Tutoraufgabe 2 Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto zx^4 + 2x \cos y + \sin z$. Zeigen Sie:

Für $|x|, |y|, |z| < \delta$, $\delta > 0$ geeignet, kann $F(x, y, z) = 0$ nach z aufgelöst werden.

Tutoraufgabe 3 Es seien $a, b > 0$. Die *Kettenlinie* $\psi : [-a, a] \to \mathbb{R}^2$ wird definert durch:

$$\psi : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \left(e^{bt} + e^{-bt}\right) / (2b) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $L(\psi)$.

Tutoraufgabe 4 Es sei I eine nicht-leere Menge und für jedes $\iota \in I$ sei eine Menge M_ι gegeben. Es sei K eine weitere Menge.

Beweisen Sie folgende Versionen der Regeln von de Morgan:

$$K \setminus \left(\bigcap_{\iota \in I} M_\iota \right) = \bigcup_{\iota \in I} (K \setminus M_\iota) \qquad \text{und} \qquad K \setminus \left(\bigcup_{\iota \in I} M_\iota \right) = \bigcap_{\iota \in I} (K \setminus M_\iota)$$

Hausaufgaben

Bearbeiten Sie bitte die folgenden schriftlichen Aufgaben. Für diese ist oben angegebenes Abgabedatum gültig. Die ausgearbeiteten Lösungen müssen mit Namen, Matrikelnummern und der Nummer der Tutorgruppe versehen werden. Sie sollten Ihre Lösungen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Gleichung

$$x + y + z = \sin(xyz)$$

kann in einer Umgebung $V \subset \mathbb{R}^3$ von 0 eindeutig nach z aufgelöst werden, d. h. auf einer geeigneten Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von 0 existiert eine Funktion u, die durch

$$\left\{ \left(x, y, u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \right\}$$

die Lösungsmenge obiger Gleichung in V darstellt.

Aufgabe 2 (1+1 Punkte) Es sei $a < b$ und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve.

(a) Es sei $S \in O(n, \mathbb{R}) = \left\{ T \in M(n \times n; \mathbb{R}); T^{\mathrm{tr}} T = E \right\}$ und $\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\tilde{\gamma}(t) = S\gamma(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Zeigen Sie $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$.

(b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\hat{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\hat{\gamma}(t) = \alpha\gamma(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Zeigen Sie $L(\hat{\gamma}) = |\alpha| \cdot L(\gamma)$.

Aufgabe 3 (2+2+1 Punkte) Es sei X eine nicht-leere Menge. Für $A \subset X$ definiert man die *Indikatorfunktion* χ_A zu A durch:

$$\chi_A : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

Zeigen Sie für $A, B \subset X$:

(a) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$,

(b) $\chi_{A \triangle B} = |\chi_A - \chi_B|$,

(c) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei eine Menge M_k gegeben. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{n} M_k \right) = M_1$$

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Dienstag, den 16. Oktober 2012 um 11:30 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.