Lehrstuhl A für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Olaf Wittich
Andreas Freh

Aachen, den 2.10.2012

Funktionentheorie I, Übungsblatt 0

Abgabe bis Montag, den 15.10.2012, 10:00 Uhr

Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung von Stoff aus der Analysis I und II.

Aufgabe 1 (2+(2+2)+5*=6+5* Punkte)

a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} (z+i)^n$

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3^n + 4^n) z^{2n}$

Hinweis: Nutzen Sie bei Teil i) den Satz von Cauchy-Hadamard.

c) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Existiert $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, so existiert auch $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Tipp: Untersuchen sie den Konvergenzradius geeigneter Potenzreihen.

Mit einem Stern gekennzeichnete Punkte sind Bonuspunkte.

Aufgabe 2 ((2+2)+3=7 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise, gleichmäßige und lokal gleichmäßige Konvergenz:

(i) $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \left(z + \frac{1}{n}\right)^2$

(ii) $g_n : K_5(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{z \cdot \sin\left(z + \frac{1}{k}\right)}{k^2}$

b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie:
$(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}(f_n))_n$ und $(\mathrm{Im}(f_n))_n$ konvergieren gleichmäßig.

Aufgabe 3 ((1+2)+2=5 Punkte)

a) Skizzieren sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ (mit Begründung) und geben sie jeweils an, ob die Menge offen, abgeschlossen, kompakt und zusammenhängend ist (das können sie ohne Begründung tun).

   i) $M_1 := \{z = r \cdot e^{i\phi} \in \mathbb{C};\, r \in [1,2), \phi \in [0,\pi)\}$

   ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C};\, |z| = \mathrm{Re}(z) + 1\}$

b) Zeigen Sie: Die Menge $M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C};\, 1 < \left| \int\limits_0^{Re(z)} e^{x^2}\, \mathrm{d}x + z^5 \right| < 10 \right\}$ ist offen und die Menge $M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C};\, 2 \leq \left| \int\limits_0^{Re(z)} e^{x^2}\, \mathrm{d}x + z^5 \right| \leq 8 \right\}$ ist abgeschlossen.

   Tipp: Zeigen sie zuerst die Stetigkeit der Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \left| \int\limits_0^{Re(z)} e^{x^2}\, \mathrm{d}x + z^5 \right|$.