Konstruktion der reellen Zahlen

Vortrag zum Proseminar zur Analysis, 24.10.2012

Adrian Hauffe-Waschbüsch

In diesem Vortrag werden die reellen Zahlen aus rationalen CAUCHY-Folgen konstruiert. Dies dient zur Vorbereitung der späteren Vorträge, in denen aus reellen Folgen die hyperreellen Zahlen konstruiert werden. Durch die reellen Zahlen wird das Problem behoben, dass rationale CAUCHY-Folgen unter Umständen in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren. Betrachte dazu zum Beispiel die Folgel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese ist monoton fallend und beschränkt, aber für einen möglichen Grenzwert a gilt $a^2 = 2$, also $a \notin \mathbb{Q}$.
Dieser Vortrag wurde auf Grundlage folgender Werke verfasst:
Plesken, W.: Mathematische Grundlagen Vorlesung WS 2011/12
Krieg, A.: Zahlbereichserweiterungen

§ 1 Der Körper der reellen Zahlen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen als Quotientenring der rationalen CAUCHY-Folgen.

— *Der Ring der rationalen Cauchy-Folgen* —

(1.1) Definition (Rationale Cauchy-Folgen)
Eine rationale Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ heißt CAUCHY-*Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m > n > N$. ◇

(1.2) Definition (Nullfolge)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als *Nullfolge*, falls zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$. ◇

Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}$ die Menge der rationalen CAUCHY-Folgen und mit $\mathcal{F}_0$ die Menge der Nullfolgen.
Die Begriffe aus (1.1) und (1.2) führen uns zu folgenden Aussagen.

(1.3) Lemma
Jede CAUCHY-Folge ist beschränkt. Das heißt zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ existiert ein $0 < S \in \mathbb{Q}$ mit $|a_n| < S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ◇

Beweis
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_{N+1}| < \varepsilon$ für alle $m > N$. Nach der 2. Dreiecksungleichung ist $|a_m| - |a_{N+1}| \leq |a_m - a_{N+1}|$ und somit

$$|a_m| \leq |a_m - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < \varepsilon + |a_{N+1}| = 1 + |a_{N+1}| \text{ für alle } m > N.$$

Daraus folgt, dass $|a_m| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\} =: S$ für alle $m \in \mathbb{N}$. □

(1.4) Satz
Die Menge der CAUCHY-Folgen $\mathcal{F}$ bildet einen kommutativen Ring mit 1 mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

◇

Beweis
Die rationalen Folgen $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ bilden einen kommutativen Ring mit 1 bezüglich der komponentenweise Addition und Multiplikation, dabei ist das Nullelement $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ und das Einselement $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.
Es ist also ausreichend zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ ein Teilring ist, also dass die neutralen Elemente von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ auch in $\mathcal{F}$ liegen und Summe und Produkt zweier CAUCHY-Folgen wieder CAUCHY-Folgen sind, außerdem müssen die additiv Inversen in $\mathcal{F}$ liegen.
Die neutralen Elemente $(0)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}$ sind als konstante Folgen CAUCHY-Folgen.
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$.
Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } m > n > N.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann für $m > n > N$

$$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| < \varepsilon.$$

Nach Lemma (1.3) existiert ein $S \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $|a_n| \leq S$ und $|b_n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2S} \text{ und } |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2S} \text{ für alle } m > n > N.$$

Somit gilt für $m > n > N$

$$\begin{aligned} |(a_m b_m) - (a_n b_n)| &= |a_m(b_m - b_n) + b_n(a_m - a_n)| \\ &\leq |a_m|\,|b_m - b_n| + |b_n|\,|a_m - a_n| \\ &< S\tfrac{\varepsilon}{2S} + S\tfrac{\varepsilon}{2S} = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit sind sowohl $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, als auch $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder CAUCHY-Folgen.
Das additiv Inverse zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $-(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Da stets gilt $|(-a_m) - (-a_n)| = |a_m - a_n|$, ist auch $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge. □

(1.5) Lemma
Jede Nullfolge ist eine CAUCHY-Folge, also $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. $\diamond$

Beweis
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_0$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann existiert nach Definition ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k > N$. Dann gilt:

$$|a_m - a_n| \leq |a_m| + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ für alle } m > n > N.$$

$\square$

(1.6) Lemma
Die Nullfolgen $\mathcal{F}_0$ sind abgeschlossen unter der Addition. $\diamond$

Beweis
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_0$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Dann ist $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n > N$. $\square$

(1.7) Lemma
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ eine CAUCHY-Folge, aber keine Nullfolge. Dann existiert ein $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq s$ oder $a_n \leq -s$ für alle $n > N$. $\diamond$

Beweis
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ und zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n = n(\varepsilon, N) > N$, sodass $|a_n| \geq \varepsilon$. Darüber hinaus ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, also gibt es zu diesem ε ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \frac{1}{4}\varepsilon$ für alle $m > n > N'$.
Setze nun $n_0 = n(\varepsilon, N') > N'$. Nun gilt für alle $m > n_0$:

$$|a_m - a_{n_0}| < \frac{1}{4}\varepsilon, \text{ also } -\frac{1}{4}\varepsilon < a_m - a_{n_0} < \frac{1}{4}\varepsilon$$

und somit

$$a_{n_0} - \frac{1}{4}\varepsilon < a_m < a_{n_0} + \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Setze $s := |a_{n_0}| - \frac{1}{4}\varepsilon (> \frac{3}{4}\varepsilon)$. Für $a_{n_0} > 0$ erhält man durch Benutzung der linken Ungleichung $a_m > a_{n_0} - \frac{1}{4}\varepsilon = |a_{n_0}| - \frac{1}{4}\varepsilon = s$, im Fall $a_{n_0} < 0$ benutzt man die rechte Ungleichung und erhält $a_m < a_{n_0} + \frac{1}{4}\varepsilon = -|a_{n_0}| + \frac{1}{4}\varepsilon = -s$ für alle $m > n_0$. $\square$

— *Definition der reellen Zahlen* —

(1.8) Definition (Reelle Zahlen)
Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* ist definiert durch

$$\mathbb{R} := \mathcal{F}/\mathcal{F}_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}\}.$$

$\diamond$

(1.9) Lemma
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein kommutativer Ring mit 1.
Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ definiert man die Verknüpfungen:

$$((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) + ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) := ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mathcal{F}_0 = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0,$$

$$((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) \cdot ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) := ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mathcal{F}_0 = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0.$$

Neutrale Elemente:

$$\begin{aligned} 0 &:= (0)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \\ 1 &:= (1)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \end{aligned}$$

◇

Beweis
Zunächst muss die Vertreterunabhängigkeit der Verknüpfungen gezeigt werden.
Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a' := (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}, b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, b' := (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ für die gilt $a + \mathcal{F}_0 = a' + \mathcal{F}_0$ und $b + \mathcal{F}_0 = b' + \mathcal{F}_0$, es gilt also $a = a' + c$ und $b = b' + c'$ für $c, c' \in \mathcal{F}_0$ geeignet.
Damit die Addition wohldefiniert ist, muss gelten $(a + b) + \mathcal{F}_0 = (a' + b') + \mathcal{F}_0$, also $((a + b) - (a' + b')) = c + c' \in \mathcal{F}_0$, dies ist durch Lemma (1.6) erfüllt.
Für die Wohldefiniertheit der Multiplikation muss gezeigt werden, dass $(ab - a'b') \in \mathcal{F}_0$.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. Da a und b' Cauchy-Folgen sind, existiert nach Lemma (1.3) ein $S \in \mathbb{Q}_{>0}$, sodass $|a_n| < S$ und $|b'_n| < S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $a + \mathcal{F}_0 = a' + \mathcal{F}_0$ und $b + \mathcal{F}_0 = b' + \mathcal{F}_0$ folgt, dass $(a - a'), (b - b') \in \mathcal{F}_0$, es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{2S}$ und $|b_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{2S}$ für alle $n > N$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \left|a_n b_n - a'_n b'_n\right| &= \left|a_n(b_n - b'_n) - b'_n(a'_n - a_n)\right| \\ &\le |a_n| \left|b_n - b'_n\right| + \left|b'_n\right| \left|a'_n - a_n\right| \\ &< S\frac{\varepsilon}{2S} + S\frac{\varepsilon}{2S} = \varepsilon \text{ für alle } n > N. \end{aligned}$$

Es gilt $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) + ((0)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = (a_n + 0)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$.
Ebenso wie $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) \cdot ((1)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = (a_n \cdot 1)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$.
Die restlichen Ringeigenschaften werden von $\mathcal{F}$ vererbt, da die Verknüpfungen auf die Verknüpfungen in $\mathcal{F}$ zurückgeführt werden. □

(1.10) Satz
Der Ring $\mathbb{R}$ ist bereits ein Körper.
Für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ gilt

$$a^{-1} = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0, a'_n := \begin{cases} 1 & a_n = 0 \\ a_n^{-1} & a_n \neq 0. \end{cases}$$

◇

Beweis
Da $\mathbb{R}$ nach Lemma (1.9) ein kommutativer Ring mit 1 ist, ist noch zu zeigen, dass das angegebene Element ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{R}$ ist. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \neq 0$ und somit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ keine Nullfolge. Dann existiert nach Lemma (1.7) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $|a_n| \geq s$ für alle $n > n_0$, also insbesondere $a_n \neq 0$ für alle $n > n_0$.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge ist, gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < s^2\varepsilon$ für alle $m > n > N'$. Somit gilt für alle $m > n > N := \max\{n_0, N'\}$

$$\left|a'_m - a'_n\right| = \left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n - a_m}{a_m a_n}\right| = \frac{1}{|a_m|\,|a_n|}\,|a_m - a_n| < \frac{1}{s^2}s^2\varepsilon = \varepsilon,$$

also ist $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge.
Es folgt $(a_n a'_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = (1)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$, da $a_n a'_n = 1$ für alle $n > n_0$.
Seien $a, a', b \in \mathbb{R}$ mit $aa' = 1 = ab$, dann gilt da $\mathbb{R}$ ein kommutativer Ring ist

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (aa') = (ba) \cdot a' = (ab) \cdot a' = 1 \cdot a' = a'.$$

Somit besitzt jedes Element von $\mathbb{R}$, außer dem Nullelement, ein eindeutiges multiplikativ Inverses. $\square$

(1.11) Proposition
a) Durch

$$((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) < ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) :\Leftrightarrow$$

Es gibt ein $s \in \mathbb{Q}, s > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n + s < b_n$ für alle $n > N$.

wird eine Anordnung auf $\mathbb{R}$ definiert.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2) $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$

3) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.

b) Diese Definition lässt sich zu einer Totalordnung erweitern durch

$$a \leq b :\Leftrightarrow (a < b \text{ oder } a = b)$$

$\diamond$

Beweis
Es ist zu zeigen, dass die Definition vertreterunabhängig ist und die Relation eine Totalordnung ist, also jede zwei Elemente vergleichbar sind und die Relation transitiv ist.

a) Seien $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = ((a'_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0)$ und $((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = ((b'_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0)$ und $s \in \mathbb{Q}_{>0}, N \in \mathbb{N}$ mit $a_n + s < b_n$ für alle $n > N$. Es existiert wegen der Gleichheit ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'_n| < \frac{s}{3}$ und $|b_n - b'_n| < \frac{s}{3}$ für alle $n > N'$. Nun gilt

$$a'_n + \frac{s}{3} < a_n + \frac{2s}{3} < b_n - \frac{s}{3} < b'_n \text{ für alle } n > \max\{N, N'\}.$$

Also ist $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 < (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$.
Seien $a = ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0), b = ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0), c = ((c_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $b < c$ dann existieren $s, s' > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, für die gilt $a_n + s < b_n$ und $b_n + s' < c_n$ für alle $n > N$. Für alle $n > N$ gilt nun

$$a_n + s + s' < b_n + s' < c_n.$$

Da $s + s' > 0$ ist, folgt $a < c$.
Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0, b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0, c := (c_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \in \mathbb{R}$

1) Sei $a < b$, dann existiert ein $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n + s < b_n$ für alle $n > N$, also auch $a_n + c_n + s < b_n + c_n$ für alle $n > N$. Daraus folgt $a + c < b + c$.

2) Sei $a < b$ und $c > 0$, dann existiert ein $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n + s < b_n$ für alle $n > N$. Da $c > 0$ ist, existiert nach Lemma (1.7) ein $s' \in \mathbb{Q}_{>0}$ und ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $c_n > s'$ für alle $n > N'$. Somit ist

$$a_n c_n + ss' < a_n c_n + sc_n = (a_n + s)c_n < b_n c_n \text{ für alle } n > \max\{N, N'\}.$$

Da $ss' > 0$ ist, gilt $ac < bc$.

3) Sei $a > 0$. Angenommen $a^{-1} < 0$. Dann ist nach 2) $1 = a^{-1}a < 0 \cdot a = 0$. Dies ist nach der Definition von $<$ falsch. Somit kann nur gelten $a^{-1} > 0$.

b) Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$ ist $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, also existieren nach Lemma (1.7) $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n - b_n > s$ oder $a_n - b_n < -s$ für alle $n > N$.
Im Fall $a_n - b_n > s$ ist $b_n + s < a_n$ für alle $n > N$ und damit nach Definition $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) > ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0)$.
Im Fall $a_n - b_n < -s$ ist $a_n + s < b_n$ für alle $n > N$ und damit nach Definition $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) < ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0)$.
Also sind alle Elemente vergleichbar.

Somit ist die Relation eine Totalordnung und wohldefiniert. $\square$

(1.12) Bemerkung
Der folgende Versuch einer Ordnung scheitert dagegen.

$$((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) \leq ((b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) :\Leftrightarrow a_n \leq b_n \text{ für fast alle } n$$

Zum Beispiel gilt für $a := (0)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0, b := (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0, c := (-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$, dass $c < a < b$ ist nach dieser Definition, also $0 < 0 < 0$ womit die Vertreterunabhängigkeit verletzt ist. ◇

Mit der Anordnung lässt sich der Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ definieren.

(1.13) Definition
Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Das bedeutet $|(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0| = (|a_n|_{n\in\mathbb{N}}) + \mathcal{F}_0$. Dies ist wohldefiniert, da nach 2. Dreiecksungleichung gilt $||a_m| - |a_n|| \leq |a_m - a_n|$ und somit mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge ist. ◇

Nun betten wir $\mathbb{Q}$ kanonisch in $\mathbb{R}$ ein.

(1.14) Lemma
Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$$

ist ein injektiver Körperhomomorphismus, welcher die Anordnung erhält. ◇

Beweis
Es müssen zunächst die Eigenschaften eines Ringhomomorphismus gezeigt werden.
Es gilt $\Phi(0) = (0)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = 0$ und $\Phi(1) = (1)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = 1$, also werden neutrale Elemente erhalten.
Seien $p, q \in \mathbb{Q}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\Phi(p) + \Phi(q) &= ((p)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) + ((q)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = (p+q)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = \Phi(p+q) \\
\Phi(p) \cdot \Phi(q) &= ((p)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) \cdot ((q)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = (pq)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = \Phi(pq).
\end{aligned}$$

Somit ist Φ ein Ringhomomorphismus.
Nun ist noch zu zeigen, dass die Anordnung erhalten bleibt.
Sei nun $p < q$, dann ist $s := \frac{q-p}{2} \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $p + s < q$, also

$$\Phi(p) = (p)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 < (q)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 = \Phi(q).$$

□

(1.15) Lemma

a) Die Abbildung aus Lemma (1.14) ist der einzige Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

b) Es gibt keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. ◇

Beweis

a) Sei $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt $\Phi(1) = 1 = (1)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$. Da $\Phi(1) = 1$ ist, ist durch das Bild der 1 induktiv das Bild von $\mathbb{N}$ das Kanonische. Da Ringhomomorphismen additiv Inverse erhalten, ist damit auch das Bild von $\mathbb{Z}$ das Kanonische. Da zusätzlich die Struktur der 1 erhalten wurde, werden auch multiplikative Inverse erhalten, da für $q \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$ gilt

$$1 = \Phi(1) = \Phi(qq^{-1}) = \Phi(q) \cdot \Phi(q^{-1}) \Rightarrow \Phi(q)^{-1} = \Phi(q^{-1})$$

und dadurch ist das Bild von allen Elementen von $\mathbb{Q}$ als das Kanonische festgelegt.

b) Sei $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ ein Ringhomomorphismus. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eingebettet ist, muss analog zu a) das Bild von allen so eingebetteten Elementen von $\mathbb{Q}$ das Kanonische sein. Insbesondere ist $\Psi((2)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = 2$. Es existiert, wie wir in Analysis I gesehen haben, ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = (2)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$. Somit ist

$$2 = \Psi((2)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = \Psi(x^2) = \Psi(x)^2,$$

also gibt es ein $c := \Psi(x) \in \mathbb{Q}$ mit $c^2 = 2$, ein solches c existiert aber in $\mathbb{Q}$ nicht. Hiermit kann es keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ geben. □

§ 2 Vollständigkeit

Wie in Lemma (1.15) gezeigt ist $\mathbb{R}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. Der nächste Abschnitt befasst sich mit den besonderen Eigenschaften von $\mathbb{R}$. Da wir $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eingebettet haben, können wir nun Elmente aus $\mathbb{Q}$ auch als Elemente von $\mathbb{R}$ auffassen und so Elemente von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ verknüpfen.

(2.1) Satz

Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$ das heißt, zu jedem $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$x < q < y.$$

◇

Beweis
Da $((x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0) = x < y = ((y_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0)$ existiert nach Satz (1.11) ein $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n + s < y_n$ für alle $n > N$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CAUCHY-Folgen sind, existiert ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $|x_m - x_n| < \frac{s}{4}$ und $|y_m - y_n| < \frac{s}{4}$ für alle $m > n > N'$. Setzte $M := \max\{N, N'\} + 1$ und $q := x_M + \frac{s}{2}$. Dann gilt für alle $n > M$:

$$\begin{aligned} x_n - x_M &\leq |x_n - x_M| < \frac{s}{4} \text{ und somit } x_n + \frac{s}{4} < x_M + \frac{s}{2} = q, \text{ also } x < q, \\ y_M - y_n &\leq |y_M - y_n| < \frac{s}{4} \text{ und somit } y_M - \frac{s}{4} < y_n. \end{aligned}$$

Mit $x_M + s < y_M$ folgt dann

$$q + \frac{s}{4} = x_M + \frac{3s}{4} < y_M - \frac{s}{4} < y_n, \text{ also } q < y.$$

□

Mit diesem Satz kann die GAUSS-Klammer auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

(2.2) Korollar
Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein

$$a = [x] \in \mathbb{Z} \text{ mit } a \leq x < a + 1$$

◇

Beweis
Es existiert ein $y \in \mathbb{Q}$ mit $x - 1 < y < x$ nach Satz (2.1). Sei $q = [y] \in \mathbb{Z}$. Wegen $q \leq y < q + 1$, ist $q < x < q + 2$. Im Fall $q < x < q + 1$ setze $[x] = q$. Gilt $q + 1 \leq x < q + 2$, so setze $[x] = q + 1$.
Seien $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r \leq x < r + 1$ und $s \leq x < s + 1$. Dann ist

$$r - (s + 1) < x - x = 0 < (r + 1) - s$$

und somit

$$-1 < s - r < 1 \text{ mit } s - r \in \mathbb{Z}, \text{ also } s - r = 0,$$

woraus die Eindeutigkeit der GAUSS-Klammer folgt. □

(2.3) Definition (Archimedisch angeordneter Körper)
Ein angordneter Körper K heißt *archimedisch* angeordnet, wenn zu jedem $x, y \in K$, mit $x > y > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $ny > x$. ◇

(2.4) Satz
Der Körper $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet. ◇

Beweis
Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y > 0$, sei $z := \frac{x}{y}$, also $z > 0$ nach Proposition (1.11). Dann liefert Korollar (2.2) $z < [z] + 1 \geq 1$. Setze $n := [z] + 1 \in \mathbb{N}$.
Daraus folgt mit Proposition (1.11)

$$n > z = \frac{x}{y} \Rightarrow ny > x.$$

□

Aus der Dichtheitseigenschaft folgt sofort das

(2.5) Korollar
Jede rationale Cauchy-Folge ist auch eine reelle Cauchy-Folge. ◇

Beweis
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Cauchy-Folge und $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Mit Satz (2.1) existiert ein $\delta \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \delta < \varepsilon$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Cauchy-Folge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \delta < \varepsilon$ für alle $m > n > N$. □

(2.6) Definition
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, genau dann wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ für alle } n > N.$$

◇

Nun haben wir alle Mittel, um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu zeigen.

(2.7) Satz
a) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, also ist $\mathbb{R}$ vollständig.

b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$, die als reelle Folge gegen x konvergiert, also ist $\mathbb{R}$ die Vervollständigung zu $\mathbb{Q}$. ◇

Hinweis zum Beweis: Wenn ein Element $x \in \mathbb{Q}$ mithilfe der Einbettung als Element aus $\mathbb{R}$ aufgefasst wird, aber trotzdem wichtig ist, dass dieses Element aus $\mathbb{Q}$ ist, wird dieses durch $x_{\mathbb{R}}$ gekennzeichnet.

Beweis
a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.
Wähle dazu mit Hilfe von Satz (2.1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ mit $|a_n - x_{n\mathbb{R}}| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. Dann existiert ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < \varepsilon_{\mathbb{R}}$ und dazu mit Hilfe

von Satz (2.4) ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > \frac{4}{\delta}$ und da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist $|a_m - a_n| < \frac{\delta}{2}$ für alle $m > n > N$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, da

$$\begin{aligned}|x_m - x_n|_{\mathbb{R}} &\leq |x_{m\mathbb{R}} - a_m| + |a_m - a_n| + |a_n - x_{n\mathbb{R}}| \\ &< \frac{1}{m} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n} < \frac{2}{N} + \frac{\delta}{2} < \delta < \varepsilon_{\mathbb{R}} \text{ für alle } m > n > N.\end{aligned}$$

Sei nun $\beta := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig, N wie oben definiert.
Es gilt $|x_m - x_n|_{\mathbb{R}} < \delta$ für alle $m > n > N$ und somit

$$|\beta - x_{n\mathbb{R}}| = (|x_m - x_n|)_{m\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 < (q)_{m\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0$$

für ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $\delta < q_{\mathbb{R}} < 2\delta$.
Nun ist für alle $n > N$

$$|\beta - a_n| \leq |\beta - x_{n\mathbb{R}}| + |x_{n\mathbb{R}} - a_n| < 2\delta + \frac{1}{n} < 3\delta.$$

Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen β.

b) Sei $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $(b_{n\mathbb{R}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_{m\mathbb{R}} - b_{n\mathbb{R}}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m > n > N$. Wie im Beweis von a) gesehen, ist dann

$$|b - b_{n\mathbb{R}}| = (|b_m - b_n|)_{m\in\mathbb{N}} + \mathcal{F}_0 < \varepsilon \text{ für alle } n > N.$$

Also konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als reelle Folge gegen b. □