Konvergenz von Funktionenfolgen

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 09.01.2013

Patrick Christiansen

In diesem Vortrag wird die Konvergenz von Funktionenfolgen auf den hyperreelen Zahlen behandelt.

§ 1 Gleichmäßige Stetigkeit

Zunächst betrachten wir die Definition gleichmäßiger Stetigkeit einer Folge auf $\mathbb{R}$

(1.1) Definition
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ dann ist f *gleichmäßig stetig* (im Folgenden *glm. stetig*) auf A genau dann, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x, y \in A)(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

und die beiden Sätze:

(1.2) Satz
Eine Funktion f ist *glm. stetig* auf A genau dann, wenn

$$(\forall x, y \in {}^*\mathrm{A})(x \simeq y \Rightarrow {}^*f(x) \simeq {}^*f(y))$$

Beweis
" $\Rightarrow$ "
f sei *glm. stetig* auf A, also gilt:
$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x, y \in A)(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$
$\overset{\text{Transfer}}{\Rightarrow}$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x, y \in {}^*\mathrm{A})(|x-y| < \delta \rightarrow |{}^*f(x) - {}^*f(y)| < \varepsilon)$
Es seien $x, y \in {}^*\mathrm{A}$ mit $x \simeq y$.
Es gilt $|x-y| \leqslant d$ mit d infinitesimal, also auch, für alle $\delta \in \mathbb{R}$:
$|x-y| \leqslant d < \delta$
Nach Voraussetzung folgt, dass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $|{}^*f(x) - {}^*f(y)| < \varepsilon$, also $|{}^*f(x) - {}^*f(y)| = e$ mit e infinitesimal.
Damit gilt: $x \simeq y \Rightarrow {}^*f(x) \simeq {}^*f(y)$
"$\Leftarrow$"
Es gelte: $x \simeq y$, also $|x-y| \leqslant d < \delta$ mit d infinitesimal, für alle $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$
$\overset{\text{n.V.}}{\Rightarrow}$ ${}^*f(x) \simeq {}^*f(y)$, also $|{}^*f(x) - {}^*f(y)| \leqslant e < \varepsilon$ mit e infinitesimal, für alle $x, y \in {}^*\mathrm{A}$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$). So folgt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_{>0})(\forall x, y \in {}^*\mathrm{A})(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

$$\overset{\text{Ex.-Transfer}}{\Rightarrow} (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x, y \in A)(|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \qquad \square$$

(1.3) Bemerkung
f ist stetig in einem reellen Punk c genau dann, wenn für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:
$x \simeq c \Leftrightarrow {}^*f(x) \simeq {}^*f(c)$

(1.4) Satz
Ist die reelle Funktion f *stetig* auf dem geschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, so ist f *glm. stetig* auf $[a, b]$

Beweis
Seien $x, y \in {}^*[a, b]$ mit $x \simeq y$. Sei weiter $c = sh(x)$.
Da $a \leqslant x \leqslant b$ und $x \simeq c$, gilt:
$c \in [a, b]$ und somit ist f stetig im Punkt c.
Nach 1.3 erhält man ${}^*f(x) \simeq {}^*f(c)$ und ${}^*f(y) \simeq {}^*f(c)$.
Daraus folgt ${}^*f(x) \simeq {}^*f(y)$ und damit folgt mit 1.2: f ist *glm. stetig* auf $[a, b]$. $\square$

§ 2 Funktionenfolgen

(2.1) Definition
Sei $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ eine Funktionenfolge $f_n : A \to \mathbb{R}$ auf $A \subseteq \mathbb{R}$. Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ wenn für alle $x \in A$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f(x)$$

genauer:

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > m \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

In dieser Definition hängt die Wahl von m von der Wahl sowohl von x ab, als auch von ε.

(2.2) Definition
Wir sagen $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn die Wahl von m nur von ε abhängt, also ein m die Bedingung für alle $x \in A$ erfüllt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N})(n > m \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Wir wissen bereits, wie man eine Folge von Zahlen auf eine Hyperfolge erweitert, doch nun wollen wir dasselbe auf Funktionenfolgen anwenden. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ können wir die Funktion f_n zu einer Funktion mit Definitionsbereich $^*\mathrm{A}$ erweitern, wir möchten aber $f_n : {}^*\mathrm{A} \to {}^*\mathbb{R}$ für unbeschränkte n definieren. Um dies zu erreichen identifizieren wir zunächst die ursprüngliche Funktionenfolge $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ mit der Funktion:

$$F : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{R}$$

mit $F(n, x) = f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in A$. Diese Funktion hat die Erweiterung

$$^*F : {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathrm{A} \to {}^*\mathbb{R}$$

die benutzt werden kann um $^*f_n : {}^*\mathrm{A} \to {}^*\mathbb{R}$ zu definieren, indem man $^*f_n(x) = {}^*F(n, x)$ setzt. So haben wir nun eine Hyperfolge von Funktionen $\langle {}^*f_n(x) : n \in {}^*\mathbb{N} \rangle$ wie gefordert. Für alle Standardzahlen $n \in \mathbb{N}$ liefert $^*f_n$ lediglich die Erweiterung der Originalfunktion f_n. Dies folgt durch Transfer von

$$(\forall x \in {}^*\mathrm{A})({}^*f_n(x) = {}^*F(n, x)).$$

Weiter hat für alle $x \in A$ die reelle Folge $s = \langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ die Erweiterungen zu einer Hyperfolge $\langle {}^*f_n : n \in {}^*\mathbb{N} \rangle$. Dies folgt durch Transfer von

$$(\forall n \in \mathbb{N})(s(n) = F(n, x)).$$

Betrachtet man die Charakterisierung von konvergenten Folgen, beschrieben durch diese Definition, können wir sagen:

(2.3) Satz
Die Folge $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ von reellen Funktionen mit Definitionsbereich $A \in \mathbb{R}$ konvergiert *punktweise* gegen die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ genau dann wenn für alle $x \in A$ und jedes unbeschränkte $n \in {}^*\mathbb{N}$ gilt: ${}^*f_n(x) \simeq {}^*f(x)$.

(2.4) Satz
$\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn für alle $x \in {}^*\mathrm{A}$ und jedes unbeschränkte $n \in {}^*\mathbb{N}$ gilt: ${}^*f_n(x) \simeq {}^*f(x)$

Beweis
"$\Rightarrow$"
$\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ Es gilt also nach dem Transfer-Prinzip:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N})(n > m \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$$\overset{\text{Transfer}}{\Rightarrow} (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in {}^*\mathrm{A})(\forall n \in {}^*\mathbb{N}_\infty)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

,da für alle unbeschränkten $n \in {}^*\mathbb{N}$ gilt: $n > m$.

$$\Rightarrow (\forall x \in {}^*\mathrm{A})(\forall n \in {}^*\mathbb{N}_\infty)({}^*f_n(x) \simeq {}^*f(x))$$

"$\Leftarrow$"
Es gelte: $(\forall n \in {}^*\mathbb{N}_\infty)(\forall x \in {}^*\mathrm{A})({}^*f_n(x) \simeq {}^*f(x))$
Man wähle ein unbeschränktes $n \in {}^*\mathbb{N}$ so gilt demnach auch:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists m \in {}^*\mathbb{N})(\forall x \in {}^*\mathrm{A})(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > m \to |{}^*f_n(x) - {}^*f(x)| < \varepsilon)$$

$$\overset{\text{Ex-Transfer}}{\Rightarrow} (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N})(n > m \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \qquad \square$$

Der Beweis von 2.3 kann analog geführt werden, indem man einfach $(\forall x \in A)$ beim Transfer nicht erweitert, da m schließlich von ε und x abhängt. Um klar zu machen, was die Idee hinter diesen beiden Sätzen ist, betrachten wir das

(2.5) Beispiel
Es sei $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ die Funktionenfolge mit $f_n(x) = x^n$ auf $A = [0, 1]$. Diese Funktion konvergiert punktweise gegen die Funktion f, die konstant 0 ist auf $[0, 1)$ und mit $f(1) = 1$. Obwohl für $x < 1$ die Funktion $\langle x^n : n \in \mathbb{N} \rangle$ gegen 0 konvergiert, verlangsamt sich die Konvergenz, wenn x gegen 1 läuft, in dem Sinne, dass für ein festes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wir n immer größer wählen müssen, damit wir den Punkt erreichen an dem die Funktion kleiner als ε wird. Letztlich wird es "*unendlich lange*"dauern bis die Funktion infinitesimal nah an 0 liegt. Beim

Transfer des Argumentes der punktweise Konvergenz, wobei ε ein positives Infinitesimal ist, erhält man, dass ein $M \in {}^*\mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > M$ gilt $x^n < \varepsilon$ und $x^n \simeq 0$. Dieses M muss jedoch unbeschränkt sein, da sonst (wenn n beschränkt ist) $x \simeq 1$ impliziert, dass $x^n \simeq 1$ gilt. Daher liegt $x^n : n \in \mathbb{N}$ komplett im Halo von 1. Jedoch gibt es ein bestehendes Prinzip, dass daraus folgert, dass $x^n : n \leqslant M$ im Halo von 1 enthalten ist (vgl. *Robinson's sequential lemma* in Robert Goldblatts "Lectures on the Hyperreals", Abschnitt 15.2). Außerdem folgt $x^N \not\simeq 0$, d.h. $f_N(x) \not\simeq f(x)$, was zeigt das die Bedingung aus 2.4 verletzt ist und daher die ursprüngliche Standard-Folge $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

§ 3 Stetigkeit der Grenzfunktion unter glm. Konvergenz

Die Funktionenfolge $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ von stetigen Funktionen kann punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergieren, wie bereits in §2 durch $f_n(x) = x^n$ gezeigt. Bei gleichmäßiger Konvergenz kann dieses Phänomen nicht auftreten:

(3.1) Satz

Sind alle Funktionen $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ stetig auf $A \subseteq \mathbb{R}$ und konvergiert die Folge gleichmäßig gegen die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ dann ist f stetig auf A.

Beweis

Sei $c \in A$. Um zu zeigen, dass f stetig im Punkt c nach 1.3 ist, ist noch, wenn $x \in {}^*$A mit $x \simeq c$ gilt, zu zeigen:

${}^*f(x) \simeq {}^*f(c)$, also $|{}^*f(x) - {}^*f(c)| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dazu benutzen wir die Ungleichung(*):

$$|{}^*f(x) - {}^*f(c)| \leqslant |{}^*f(x) - {}^*f_n(x)| + |{}^*f_n(x) - {}^*f_n(c)| + |{}^*f_n(c) - {}^*f(c)|$$

Der mittlere Term $|{}^*f_n(x) - {}^*f_n(c)|$ ist infinitesimal für alle $n \in \mathbb{N}$, da $x \simeq c$ und ${}^*f_n$ stetig im Punkt c. Wählt man n groß genug, werden die beiden äußeren Terme so klein, dass ihre Summe kleiner als ε ist.

Um dies zu zeigen für ein gegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, wenden wir die Definition gleichmäßiger Konvergenz auf $\varepsilon/4$ an und erhalten, dass ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$n > m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in A$, also gilt diese Aussage auch für *f für alle $x \in {}^*$A und $n \in {}^*\mathbb{N}$ nach dem Transfer-Prinzip.

$$|{}^*f_n(x) - {}^*f(x)|, |{}^*f_n(c) - {}^*f(c)| < \varepsilon/4,$$

und so erhalten wir in der Ungleichung(*)

$$|{}^*f(x) - {}^*f(c)| < \varepsilon/4 + infinitesimal + \varepsilon/4 < \varepsilon$$

wie gefordert. Damit folgt nach 1.3 f ist stetig auf A.

Bemerkung: Der Beweis ist eine Mischung von Standard- und Nichtstandard-Argumenten, er benutzt die hyperreelle Charakterisierung von Stetigkeit auf ${}^*f_n$ und *f aber die Standarddefinition von gleichmäßiger Konvergenz von $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, als auch 2.4. 2.4 hätten wir auch benutzen können, um die beiden äußeren Terme durch eine infinitesimale Zahl abzuschätzen, doch was wäre mit $|{}^*f(x) - {}^*f_n(c)|$ passiert, wenn n unbeschränkt wäre? Wir werden dies zu einem späteren Zeitpunkt diskutieren und uns erst mit einer anderen Frage auseinandersetzen. □

§ 4 Stetigkeit bei erweiterten Hyperfolgen

Gegeben sei eine Folge $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ von Funktionen, die stetig auf $A \subseteq \mathbb{R}$ sei. Die Frage die uns hier beschäftigen soll ist, was über die Stetigkeit der erweiterten Funktionen ${}^*f_n$ ausgesagt werden kann, gegeben durch die (wie in §2 definierte) Hyperfolge, $\langle {}^*f_n : n \in {}^*\mathbb{N}\rangle$.
Wenn n nun unbeschränkt ist, dann ist ${}^*f_n$ eine Funktion von *A nach ${}^*\mathbb{R}$ und selbst, wenn wir den Definitionsbereich auf A einschränken, könnte die Funktion Werte annehmen die nicht reell sind, z.B. wenn ${}^*f_n(x) = x^n$. Dieses ${}^*f_n$ ist eventuell keine Erweiterung einer reellen Funktion and damit können wir nicht das Transfer-Argument für Funktionen direkt verwenden, wir können allerdings eine stetige Eigenschaft zeigen, die äquivalent ist zu der aus Goldblatts Satz 7.1.3(3). Auch wenn ${}^*f_n$ möglicherweise nicht das gesamte Halo eines Punktes y auf das Halo von ${}^*f_n$(y) abbildet, bildet es eine ausreichend kleine Umgebung von y ab:

(4.1) Satz
Seien die Funktionen $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ alle stetig auf $A \subseteq \mathbb{R}$, dann existiert für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ und alle $y \in {}^*$A ein positives Infinitesimal d, sodass gilt: ${}^*f_n(x) \simeq {}^*f_n(y)$ für alle $x \in {}^*$A mit $|x - y| < d$.

Beweis
Dass f_n stetig ist auf A, wird ausgedrückt durch den Satz

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall y \in A)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in A)(|x - y| \to |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon),$$

der besagt, dass "für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $y \in A$ f_n stetig im Punkt $y \in A$ ist". Transferieren wir dies. Sei also $n \in {}^*\mathbb{N}$ und $x, y \in {}^*$A und sei ε ein positives Infinitesimal. Dann erhalten wir durch das Transferprinzip ein $\delta \in {}^*\mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$|x - y| < \delta \to {}^*f_n(x) \simeq {}^*f_n(y)$$

gilt, da ε infinitesimal. Nun ersetze δ durch ein positives Infinitesimal $d < \delta$ und es folgt die Behauptung. □

Diese Erkenntnis kann genutzt werden, um den naheliegenden alternativen Beweis zu führen, dass gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit bewahrt 3.1, der die Charakteristik gleichmäßiger Konvergenz, wie in 2.4 beschrieben, verwendet. Wie bereits in 3.1 erklärt, ist die Idee die folgende Ungleichung(*) zu beweisen:

$$|{}^*f(x) - {}^*f(c)| \leqslant |{}^*f(x) - {}^*f_n(x)| + |{}^*f_n(x) - {}^*f_n(c)| + |{}^*f_n(c) - {}^*f(c)|$$

Die beiden äußeren Termen werden infinitesimal. Nun wollen wir, dass $|{}^*f(x) - {}^*f(c)|$ infinitesimal wird. Um dies zu erreichen, muss n unbeschränkt sein. Sei nun f_n stetig auf $A \subseteq \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ konvergiere gleichmäßig gegen $f : A \to \mathbb{R}$. Wähle $c \in \mathbb{R}$ mit dem Ziel zu zeigen, dass f stetig in c ist. Wähle ein unbeschränktes $n \in {}^*\mathbb{N}$, dann ergibt sich nach 4.1, dass ein Infinitesimal $d > 0$ existiert, sodass gilt:

$$|x - c| < d \Rightarrow {}^*f_n(x) \simeq {}^*f_n(c)$$

für alle $x \in {}^*A$. Wenn nun aber $x \in {}^*A$ und $|x - c| < d$ erhalten wir ${}^*f(x) \simeq {}^*f_n(x)$ und ${}^*f(c) \simeq {}^*f_n(c)$ durch gleichmäßige Konvergenz 2.4, weil n unbeschränkt und $x, c \in {}^*A$. Damit folgt:

$${}^*f(x) \simeq {}^*f_n(x) \simeq {}^*f_n(c) \simeq {}^*f(c)$$

woraus wiederum folgt: ${}^*f(x) \simeq {}^*f(c)$. Also haben wir gezeigt, dass ein positives Infinitesimal $d \simeq 0$ existiert, sodass für alle $x \in {}^*A$,

$$|x - c| < d \Rightarrow {}^*f(x) \simeq {}^*f(c).$$

Nach Goldblatts Korollar 7.1.2(3) ist damit f stetig in c.