# Große Mengen und Ultrafilter

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 31.10.2012

Marcel Marnitz

In diesem Vortrag wird das Konzept mathematischer Filter eingeführt. Sie werden in späteren Vorträgen zur Konstruktion der hyperreellen Zahlen gebraucht.

## §1 Große Mengen

Zunächst beschäftigen wir uns aber mit großen Mengen. Auf sie kommen wir in späteren Vorträgen zurück.

— *Unendlich kleine Zahlen* —

Cauchy gilt als ein Pionier der Präzision, welche charakteristisch für die heutige Mathematik ist. Seine Auffassung von unendlich kleinen Zahlen als veränderliche Größe war:

> *Wenn der Wert einer Zahl immer kleiner wird, sodass sie kleiner als jede andere Zahl wird, heißt sie* ***unendlich*** *klein. Man sagt, dass eine Zahl unendlich klein wird, falls ihr Wert kleiner wird und schließlich gegen Null konvergiert.*

Auch heute noch findet man in Textbüchern, dass die Folge

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

unendlich klein wird und

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

einen unendlich großen Wert annimmt. Können wir also ein Zahlensystem konstruieren, in dem Folgen unendlich kleine und große Zahlen sind?

Nach Cauchy sind die Folgen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

unendlich klein. Würde man die Folgen als unendlich kleine Zahl auffassen, sollten wir vielleicht die zweite als halb so groß wie die erste ansehen, weil sie doppelt so schnell wie die erste konvergiert. Ähnlich repräsentieren die Folgen

$$1, 2, 3, 4, ...$$

$$2, 4, 6, 8, ...$$

unendlich große Werte. Die zweite ist wohl größer als die erste, weil sie doppelt so schnell gegen $\infty$ konvergiert als die erste. Andererseits repräsentieren die Folgen

$$1, 2, 3, 4, ...$$

$$2, 2, 3, 4, ...$$

den gleichen unendlichen Wert.

Diese Vorstellungen sind sehr praktisch, weil sie dazu anregen, unendlich kleine und große Zahlen als Maß von Konvergenzgeschwindigkeit zu nutzen.

Bei der Konstruktion der reellen Zahlen aus Cauchy-Folgen haben wir Nullfolgen mit der Null identifiziert, während divergierende Folgen keine Rolle spielen. Wir benötigen also eine andere Art von Äquivalenzrelation als die von Cantor bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ genutzte.

— *Große Mengen* —

Seien

$$r = \langle r_1, r_2, ... \rangle,$$

$$s = \langle s_1, s_2, ... \rangle$$

beliebige reelle Folgen. Wir sagen, dass die Folgen $r$ und $s$ gleich sind, falls sie sich bis auf endlich viele Einträge unterscheiden, das heißt falls

$$E_{rs} = \{ n \mid r_n = s_n \}$$

*groß* ist. Was auch immer *groß* bedeuten mag, so sollen *große* Mengen folgende Eigenschaften haben:

(E1) $\mathbb{N}$ ist groß, da jede Folge gleich sich selbst ist.

(E2) Gleichheit ist eine transitive Eigenschaft, das bedeutet falls $E_{rs}$ und $E_{st}$ groß sind, ist auch $E_{rt}$ groß. $E_{rs} \cap E_{st} \subseteq E_{rt}$ deutet auf folgende Eigenschaft hin:

Falls $A$ und $B$ groß sind und $A \cap B \subseteq C$ gilt, dann ist auch $C$ groß.

(E3) Die leere Menge $\emptyset$ ist nicht groß, da sonst alle Teilmengen von $\mathbb{N}$ groß wären, was impliziert, dass alle Folgen gleich sind.

Punkt (E2) mag zwar zunächst einschränkend sein, aber es gibt Situationen, in denen alle drei Voraussetzungen erfüllt sind. Beispielsweise wenn $A \subseteq \mathbb{N}$ als groß bezeichnet wird, wenn es cofinit ist, das heißt $A$ enthält fast alle Elemente von $\mathbb{N}$. Das mag zwar eine mögliche Vorstellung von großen Mengen sein, ist aber nicht ganz auf unsere Bedürfnisse ausgerichtet.

Da das Zahlensystem, was wir erzeugen wollen, linear angeordnet sein soll, sagen wir, dass eine Folge $r$ kleiner als $s$ ist, falls

$$L_{rs} = \{n \mid r_n < s_n\}$$

*groß* ist.

Betrachten wir hingegen

$$r = \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... \rangle,$$
$$s = \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... \rangle,$$

so ist $E_{rs} = \emptyset$. $L_{rs} = \{2, 4, 6, 8, ...\}$, also die Menge der geraden Zahlen, ist das Komplement von $L_{sr} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, insbesondere sind beide Mengen unendlich und keine der beiden ist cofinit. Daher benötigt unsere Definition von großen Mengen eine weitere Bedingung:

(E4) Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist entweder $A$ oder $\mathbb{N} - A$ groß.

Die anderen Voraussetzungen implizieren, dass $A$ und $\mathbb{N} - A$ nicht beide groß sein können, da sonst $A \cap (\mathbb{N} - A) = \emptyset$ (betrachte Punkt (E3)) groß wäre. Das bedeutet, dass große Mengen das Komplement nicht großer Mengen sind.

# §2 Filter

Im Folgenden möchten wir uns mit Filtern beschäftigen.

**(2.1) Definition**
Sei $I$ eine nicht leere Menge. Dann ist die *Potenzmenge* von $I$ definiert durch

$$\mathrm{Pot}(I) := \{A \mid A \subseteq I\}$$

Ein *Filter* ist eine nicht leere Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Pot}(I)$, welche folgende Axiome erfüllt:

(F1) Durchschnitt zweier Elemente im Filter: $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

(F2) Aus $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \subseteq I$ folgt $B \in \mathcal{F}$

Um zu zeigen, dass $B \in \mathcal{F}$, reicht es zu zeigen, dass

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq B$$

für ein $n$ und ein $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ gilt.

Ein Filter $\mathcal{F}$ enthält die leere Menge $\emptyset$ genau dann, wenn $\mathcal{F} = \mathrm{Pot}(I)$. $\mathcal{F}$ heißt ein *echter Filter*, falls $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ein *Ultrafilter* ist ein echter Filter, der zudem folgende Eigenschaft erfüllt:

(UF) Für jede Teilmenge $A \subseteq I$ ist entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $A^c \in \mathcal{F}$, wobei $A^c = I - A$.

**(2.2) Beispiele**

a) Sei $i \in I$, dann ist $\mathcal{F}^i = \{A \subseteq I \mid i \in A\}$ der von $i$ erzeugte *Hauptfilter*. Dieser ist zudem ein Ultrafilter.

(F1) Seien $A, B \in \mathcal{F}$, das heißt $A \in \{M \subseteq I \mid i \in M\}$ und $B \in \{N \subseteq I \mid i \in N\}$. Bildet man nun $A \cap B$, so ist $i$ offensichtlich in dieser Menge enthalten. Also gilt $A \cap B \in \mathcal{F}^i$.

(F2) Sei $A \in \mathcal{F}$, das heißt $i \in A$. Weiterhin gelte $A \subseteq B$, insbesondere ist dann $i \in B$. Daraus folgt die Behauptung.

(UF) Da $i \notin \emptyset$, ist $\emptyset \notin \mathcal{F}^i$, das heißt $\mathcal{F}^i$ ist ein echter Filter. Für jede Teilmenge $A \subseteq I$ gilt entweder $i \in A$ oder $i \in A^c$. Daraus folgt die Behauptung.

b) $\mathcal{F}^{co} = \{A \subseteq I \mid I - A \text{ ist endlich}\}$ heißt *Fréchet*-Filter. Er ist kein Ultrafilter.

(F1) Seien $A, B \in \mathcal{F}^{co}$, das heißt $|I - A| < \infty$ und $|I - B| < \infty$. Es gilt: $|I - (A \cap B)| = |(A \cap B)^c| \overset{\text{De Morgan}}{=} |A^c \cup B^c| < \infty \implies A \cap B \in \mathcal{F}^{co}$.

(F2) Sei $A \in \mathcal{F}^{co}$, das heißt $|I - A| < \infty$, und $A \subseteq B$. Aus $A \subseteq B$ folgt $B^c \subseteq A^c$ und da $|A^c| < \infty$, gilt das auch für $B^c$. Daraus folgt die Behauptung, da $|B| < \infty$. Somit gilt $B \in \mathcal{F}^{co}$.

Zeige nun, dass $\mathcal{F}^{co}$ kein Ultrafilter ist:

Sei $|I| = \infty$, dann existiert eine injektive Abzählfunktion $f : \mathbb{N} \to I$ mit $G = f(2\mathbb{N})$ sowie $U = f(2\mathbb{N}+1)$. Es gilt $U, G \in \mathrm{Pot}(I)$. Insbesondere ist $G^c = U$ unendlich, da $U$ aufgrund der Injektivität von $f$ unendlich ist. Ebenso ist $G$ wegen der Injektivität unendlich. $\mathcal{F}^{co}$ ist also kein Ultrafilter, da weder $G$ noch $G^c$ in $\mathcal{F}$ liegen, da beide unendlich sind.

c) Für $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathrm{Pot}(I)$ heißt

$$\mathcal{F}^{\mathcal{H}} = \{A \subseteq I \mid A \supseteq B_1 \cap ... \cap B_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } B_i \in \mathcal{H}\}$$

der von $\mathcal{H}$ erzeugte Filter. Er ist der kleinste Filter, der $\mathcal{H}$ enthält.

(F1) Seien $A, B \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, das heißt $\exists m, n \in \mathbb{N}$ und $C_1, ..., C_m, D_1, ..., D_n, \in \mathcal{H}$ sodass $C_1 \cap ... \cap C_m \subseteq A$ und $D_1 \cap ... \cap D_n \subseteq B$.

$\Rightarrow C_1 \cap ... \cap C_m \cap D_1 \cap ... \cap D_n \subseteq A \cap B$

$\Rightarrow \exists k := m + n$ und $E_1, ..., E_k (E_1 = C_1, E_{m+1} = D_1) \in \mathcal{H} : E_1 \cap ... \cap E_k \subseteq A \cap B$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$

(F2) Sei $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ und $B \subseteq I$, das heißt $\exists n \in \mathbb{N}$ und $C_1, ..., C_n \in \mathcal{H} : C_1 \cap ... \cap C_n \subseteq A \subseteq B$. Also ist auch $B \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$.

Bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ der kleinste Filter ist, der $\mathcal{H}$ enthält.

**Beweis**
Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Pot}(I)$ ein Filter mit $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ und $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, das heißt $\exists n \in \mathbb{N}$ und $D_1, ..., D_n \in \mathcal{H} : D_1 \cap ... \cap D_n \subseteq A$.

$$\overset{(F1)}{\Rightarrow} D_1 \cap ... \cap D_n \in \mathcal{G}$$

$$\overset{(F2)}{\Rightarrow} A \in \mathcal{G}$$

Insgesamt ist also $\mathcal{F}^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{G}$.

Als nächstes zeigen wir, dass für jeden Filter $\mathcal{F}^* \subseteq \mathrm{Pot}(I)$ gilt, dass $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, wobei $\mathcal{F}^*$ folgende Eigenschaften hat:

(i) $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}^*$

(ii) Ist $\mathcal{G}$ ein Filter mit $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, so ist bereits $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{G}$.

„$\subseteq$“: Folgt aus Eigenschaft (ii): Setze $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$.

„$\supseteq$“: Sei $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, dann folgt $\exists n \in \mathbb{N}$ und $D_1, ..., D_n \in \mathcal{H} : D_1 \cap ... \cap D_2 \subseteq A$. Mit $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}^*$ und (F1) folgt, dass $A \in \mathcal{F}^*$. □

**(2.3) Korollar (Eigenschaften von Filtern)**

(I) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter. Für $A, B \subseteq \text{Pot}(I)$ gilt:

$$A \cap B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{F}$$

**Beweis**

„$\Leftarrow$“: Folgt aus den Axiomen (F1).

„$\Rightarrow$“: Es gilt $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$. Nach Voraussetzung ist $A \cap B \in \mathcal{F}$ und mit (F2) folgt $A \in \mathcal{F}$ und $B \in \mathcal{F}$. □

(II) Falls $\mathcal{F} \subseteq \text{Pot}(I)$ die Filtereigenschaft (F2) erfüllt, gilt $\mathcal{F} \neq \emptyset \Leftrightarrow I \in \mathcal{F}$. Insbesondere gilt $\{I\} \subseteq \mathcal{F}$ für jeden Filter $\mathcal{F}$.

**Beweis**

„$\Leftarrow$“: trivial

„$\Rightarrow$“: Ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$, so gibt es ein $A \in \mathcal{F}$ mit $A \in \text{Pot}(I)$, das heißt $A \subseteq I$. Da $A$ bereits im Filter enthalten ist, ist auch $I \in \mathcal{F}$ nach (F2). □

(III) Ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ hat folgende Eigenschaften für $A, B \subseteq \text{Pot}(I)$:

$$(1)\ A \cap B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}$$

$$(2)\ A \cup B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \in \mathcal{F} \vee B \in \mathcal{F}$$

$$(3)\ A^c \in \mathcal{F} \qquad \Leftrightarrow A \notin \mathcal{F}$$

**Beweis**

(1) folgt aus (I)

(2)

„$\Leftarrow$“: Sei $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$, da $A \subseteq A \cup B$ beziehungsweise $B \subseteq A \cup B$ gilt, folgt mit (F2), dass $A \cup B \in \mathcal{F}$.

„⇒“: Beweis durch Konraposition:

$$\begin{aligned} &\neg(A \in \mathcal{F} \vee B \in \mathcal{F}) \\ &\Longrightarrow A \notin \mathcal{F} \wedge B \notin \mathcal{F} \\ &\overset{\text{(UF)}}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{F} \wedge B^c \in \mathcal{F} \\ &\underset{(1)}{\overset{\text{(III)}}{\Longrightarrow}} A^c \cap B^c \in \mathcal{F} \\ &\underset{\text{Morgan}}{\overset{\text{De}}{\Longrightarrow}} (A \cup B)^c \in \mathcal{F} \\ &\overset{\text{(UF)}}{\Longrightarrow} (A \cup B) \notin \mathcal{F} \end{aligned}$$

(3) folgt aus (UF) □

(IV) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $\{A_1, ..., A_n\}$ eine endliche Sammlung von paarweise disjunkten ($A_i \cap A_j = \emptyset$) Mengen, so dass

$$A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{F}.$$

Dann gilt $A_i \in \mathcal{F}$ für genau ein $i$ mit $1 \leq i \leq n$.

**Beweis**
Da $A_1 \cup ... \cup A_n = (A_1 \cup ... \cup A_{n-1}) \cup A_n$ gilt nach (III)(2), dass $(A_1 \cup ... \cup A_{n-1}) \in \mathcal{F}$ oder $A_n \in \mathcal{F}$. Da die Mengen paarweise disjunkt sind, ist ausgeschlossen, dass sowohl $(A_1 \cup ... \cup A_{n-1}) \in \mathcal{F}$ als auch $A_n \in \mathcal{F}$ gilt ($(A_1 \cup ... \cup A_{n-1}) \cap A_n = \emptyset \notin \mathcal{F}$). Falls $A_n \in \mathcal{F}$, setze $i = n$ und es folgt die Behauptung. Sonst prüfe weiter für $A_1 \cup ... \cup A_{n-1}$. □

(V) Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subseteq \text{Pot}(I)$ hat die *endliche Durchschnitts-Eigenschaft* (fip), wenn der Durchschnitt jeder nicht-leeren endlichen Untermenge von $\mathcal{H}$ nicht leer ist, das heißt

$$B_1 \cap ... \cap B_n \neq \emptyset$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $B_1, ..., B_n \in \mathcal{H}$.

Der Filter $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ ist echt genau dann, wenn $\mathcal{H}$ die endliche Durchschnitts-Eigenschaft hat.

**Beweis**

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\mathcal{H}} \text{ ist echt}\\
\Leftrightarrow\ &\emptyset \notin \mathcal{F}^{\mathcal{H}} = \{A \subseteq I \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ und } B_i \in \mathcal{H} : B_1 \cap ... \cap B_n \subseteq A\}\\
\Leftrightarrow\ &\forall\, n \text{ und } B_n \in \mathcal{H} : \neg(B_1 \cap ... \cap B_n \subseteq \emptyset)\\
\Leftrightarrow\ &\forall\, n \text{ und } B_n \in \mathcal{H} : B_1 \cap ... \cap B_n \neq \emptyset\\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{H} \text{ hat die } \textit{endliche Durchschnitts-Eigenschaft.}
\end{aligned}
$$

□

(VI) Falls ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ eine endliche Menge enthält, enthält er eine einelementige Menge (i) und ist ein Hauptfilter (ii). Das bedeutet auch, dass jeder Nicht-Hauptfilter alle cofiniten Mengen enthält.

**Beweis (i)**
Sei $a \in A$ mit $A \in \mathcal{F}$ und $|A| < \infty$, dann gilt $\{a\} \in \mathcal{F}$ oder $\{a\}^c \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ ist Ultrafilter). Für den ersten Fall sind wir fertig. Für den zweiten Fall betrachten wir $A' = \{a\}^c \cap A$ mit $|\{a\}^c \cap A| < |A|$ und fangen wieder von vorne an. □

Zeige nun den zweiten Teil:

**Beweis (ii)**
Zu zeigen: $\exists i \in I : \mathcal{F} = \mathcal{F}^i$.

„$\supseteq$“: In (i) haben wir gezeigt, dass ein $i$ existiert mit $\{i\} \in \mathcal{F} \overset{(F2)}{\Longrightarrow} \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}^i$.

„$\subseteq$“: Sei $i$ wie in „$\supseteq$ “und $A \in \mathcal{F}$. Wir nehmen an, dass gilt $i \notin A$, also folgt mit (UF), dass $i \in A^c$. Also folgt, dass $A^c \in \mathcal{F}^i$ enthalten ist. Da wir bereits gezeigt haben, dass $\mathcal{F}^i \subseteq \mathcal{F}$ gilt, folgt $A^c \in \mathcal{F}$, was ein Widerspruch zu $\mathcal{F}$ ist Ultrafilter ist. Also gilt $i \in A$ und insgesamt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^i$. □

Zeige jetzt noch, dass jeder Nicht-Hauptfilter alle cofiniten Mengen enthält.

**Beweis**
Wir haben bereits gezeigt, dass wenn $\mathcal{F}$ eine endliche Menge enthält, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{F}^i$. Die Negation dieser Aussage ist also: $\mathcal{F}$ ist kein Hauptfilter $\Longrightarrow$ für jedes $A \in \mathrm{Pot}(I)$ mit $|A| < \infty$ gilt $A \notin \mathcal{F}$. Wir müssen also noch zeigen, dass *alle* cofiniten Mengen enthalten sind.

Sei also $A \in \mathrm{Pot}(I)$ mit $|A^c| < \infty$. Dann gilt $A^c \notin \mathcal{F}$ und mit (UF) folgt $A \in \mathcal{F}$. □

(VII) $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter auf $I$ genau dann, wenn $\mathcal{F}$ ein *maximal echter Filter* auf $I$ ist, das heißt $\mathcal{F}$ ist ein echter Filter, der nicht zu einem größeren echten Filter auf $I$ erweitert werden kann.

Für den Beweis müssen wir zunächst zeigen, dass $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ genau dann die endliche Durchschnitts-Eigenschaft hat, wenn $A \notin \mathcal{F}$.

**Beweis**
Sei $\mathcal{F}$ ein echter Filter.

„$\Rightarrow$": Nehmen wir an, dass $A \in \mathcal{F}$, dann hat $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ nicht die endliche Durchschnitts-Eigenschaft, da $A \cap A^c = \emptyset$. Daraus folgt die Behauptung per Kontraposition.

„$\Leftarrow$": Nehmen wir an, $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ hat die endliche Durchschnitts-Eigenschaft nicht, dann existiert ein $B \in \mathcal{F}$ mit $B \cap A^c = \emptyset$. Daraus folgt, dass $B \subseteq A$. Mit dem Obermengen-Axiom (F2) folgt nun $A \in \mathcal{F}$. Daraus folgt die Behauptung (Kontraposition). $\square$

Kommen wir nun zum eigentlichen Beweis.

**Beweis**
Zu zeigen ist: $\mathcal{F}$ ist Ultrafilter $\Leftrightarrow$ für jeden Filter $\mathcal{G} \subseteq \operatorname{Pot}(I)$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subsetneq \operatorname{Pot}(I)$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

„$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter und $\mathcal{G}$ wie oben.

Annahme: $\mathcal{G} \backslash \mathcal{F} \neq \emptyset$. Sei $A \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F}$. Weil $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt $A^c \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Daraus folgt: $\emptyset = A^c \cap A \in \mathcal{G}$ (F1). Widerspruch zu $\mathcal{G}$ ist ein echter Filter. Also folgt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

„$\Leftarrow$": $A \in \operatorname{Pot}(I)$ mit $A \notin \mathcal{F}$. Betrachte $\mathcal{H} := \mathcal{F} \cup \{A^c\}$. Nach dem ersten Teil des Beweises hat $\mathcal{H}$ die endliche Durchschnitts-Eigenschaft.

Betrachte $\mathcal{G} := \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$. Dann gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subsetneq \operatorname{Pot}(I)$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{F}^{\mathcal{H}}$, dann folgt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ und somit gilt $A^c \in \mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. $\square$

(VIII) Wenn $\mathcal{H}$ die endliche Durchschnitts-Eigenschaft besitzt, dann gilt für jedes $A \subseteq I$, dass mindestens eine der Mengen $\mathcal{H} \cup \{A\}$ oder $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ wieder die endliche Durchschnitts-Eigenschaft hat.

**Beweis**
Angenommen weder $\mathcal{H} \cup \{A\}$ noch $\mathcal{H} \cup \{A^c\}$ hat die endliche Durchschnitts-Eigenschaft. Das heißt:

$$\exists n \in \mathbb{N}, B_1, ..., B_n \in \mathcal{H} : B_1 \cap ... \cap B_n \cap A = \emptyset$$
$$\exists m \in \mathbb{N}, C_1, ..., C_m \in \mathcal{H} : C_1 \cap ... \cap C_m \cap A^c = \emptyset$$

Sei o.B.d.A. $n \leq m$, dann betrachte:

$$(B_1 \cap C_1) \cap (B_2 \cap C_2) \cap ... \cap (B_n \cap C_n) \cap C_{n+1} \cap ... \cap C_m =: V$$

Nach Voraussetzung ist dann $V \cap A = \emptyset$ und $V \cap A^c = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \emptyset &= (V \cap A) \cup (V \cap A^c) \\ &= V \cap (A \cup A^c) \\ &= V \cap I \\ &= V \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $\mathcal{H}$ hat die endliche Durchschnitts-Eigenschaft. Also war unsere Annahme falsch und es folgt die Behauptung. □

**(2.4) Lemma (Lemma von Zorn)**
Jede partiell geordnete Menge $(P, \leq)$, in der jede Kette eine obere Schranke in $P$ besitzt, hat mindestens ein maximales Element.

**(2.5) Bemerkung (Kette)**
Eine Kette ist eine linear geordnete Menge, das heißt für je zwei Elemente $a, b$ aus der Menge gilt entweder $a \leq b$ oder $b \leq a$.

**(2.6) Bemerkung**
Um den nächsten Beweis führen zu können, benötigen wir einen weiteren Filter:

$$S := \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{A \mid \exists x \in X : A \in \mathcal{F}_x\}$$

$S$ ist also eine Menge von Filtern auf $I$, wobei einzelne Filter durch Mengeninklusion linear geordnet sind: $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_y$ oder $\mathcal{F}_y \subseteq \mathcal{F}_x$ für jedes $x, y \in X$.

Zeige also, dass $S$ ein Filter auf $I$ ist.

(F1) Seien $A, B \in S$. Das heißt, es existiert ein $x \in X$ mit $A \in \mathcal{F}_x$ und es existiert ein $y \in X$ mit $B \in \mathcal{F}_y$. Sei nun o.B.d.A. $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_y$, das heißt $A \in \mathcal{F}_y$ und da $\mathcal{F}_y$ ein Filter ist, gilt mit (F1) $A \cap B \in \mathcal{F}_y$. Also ist auch $A \cap B \in S$.

(F2) Sei $A \in S$, also existiert ein $x \in X$ mit $A \in \mathcal{F}_x$. Da $\mathcal{F}_x$ ein Filter ist, erfüllt er (F2), das heißt für $A \subseteq B \subseteq I$ gilt $B \in \mathcal{F}_x$. Also ist auch $B \in S$.

**(2.7) Satz**
Jede Menge von Teilmengen von $I$, welche die endliche Durchschnitts-Eigenschaft hat, kann zu einem Ultrafilter auf $I$ erweitert werden.

**Beweis**
Hat $\mathcal{H}$ die endliche Durchschnitts-Eigenschaft, so ist der von $\mathcal{H}$ erzeugte Filter $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ echt (2.1)(V). Sei $P$ die Menge aller echten Filter auf $I$, die $\mathcal{H}$ enthalten und mit Hilfe der Mengeninklusion $\subseteq$ partiell angeordnet sind. Da $\mathcal{F}^{\mathcal{H}}$ ein echter Filter ist, ist $P$ nicht leer.

Sei $\mathcal{K}$ eine Kette in $P$ und $S := \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{K}} \mathcal{F}$. Nach (2.6) ist $S$ ein Filter auf $I$, der $\mathcal{F}^{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{H}$ enthält. $S$ ist ein echter Filter, also $S \in P$. Außerdem gilt $\mathcal{F} \leq S$ für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{K}$, also ist $S$ eine obere Schranke für $\mathcal{K}$ in $P$. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein $\mathcal{F}^* \in P$, sodass für jedes $\mathcal{G} \in P$ mit $\mathcal{F}^* \leq \mathcal{G}$ bereits $\mathcal{F}^* = \mathcal{G}$ folgt. Das heißt $\mathcal{F}^*$ ist ein maximal echter Filter und nach (2.3)(VII) ein Ultrafilter. □

**(2.8) Korollar**
Jede unendliche Menge hat einen nicht prinzipalen Ultrafilter.

**Beweis**
Wenn $I$ unendlich ist, ist der Filter $\mathcal{F}^{co}$ echt und hat die endliche Durchschnitts-Eigenschaft. Zudem ist er in einem Ultrafilter $\mathcal{F}$ enthalten (Satz 2.7). Aber für jedes $i \in I$ ist $I - \{i\} \in \mathcal{F}^{co} \subseteq \mathcal{F}$, also $\{i\} \notin \mathcal{F}$, aber $\{i\} \in \mathcal{F}^i$. Daher ist $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^i$ und somit ist $\mathcal{F}$ nicht prinzipal. □

Dieses Ergebnis benötigen wir für die Konstruktion der hyperreellen Zahlen. Mit weiterer Mengen-theoretischer Analysis kann man beweisen, dass es so viele nicht prinzipale Ultrafilter auf der unendlichen Mengen $I$ gibt, wie nur möglich: ein Ultrafilter ist ein Element der doppelten Potenzmenge $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(I))$ und es gibt außerdem einen Zusammenhang zwischen allen nicht prinzipalen Ultafiltern auf $I$ und $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(I))$.