Infinitesimale und unbeschränkte Zahlen

Vortrag zum Seminar zur Nonstandard Analysis, 14.11.2012

Marco Nüchel

Im folgenden Vortrag werden wir aufbauend auf den Grundlagen der vorherigen Vorträge die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um infinitesimale („unendlich kleine“) und unbeschränkte („unendlich große“) Zahlen erweitern. Auf diese Weise erhalten wir den geordneten Körper der hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$.

Dabei dient das Buch *Lectures on the hyperreals. An Introduction to nonstandard analysis* von Robert Goldblatt aus dem Springer Verlag New York (1998) als Grundlage für diesen Vortrag.

Inhaltsverzeichnis

§1 Infinitesimale und unbeschränkte Zahlen

In diesem ersten Abschnitt werden wir definieren, was wir unter infinitesimalen und unbeschränkten Zahlen verstehen.

— *Notationen* —

Im folgenden werden wir die aus den vorherigen Vorträgen bekannten Notationen verwenden. Eine Folge wollen wir verkürzt notieren als

$$r = \langle r_n \rangle = \langle r_n : n \in \mathbb{N} \rangle.$$

Des weiteren schreiben wir verkürzt für die Übereinstimmungsmenge

$$\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} = [\![r = s]\!]$$

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse der Folgen unter der Relation $\langle r_n \rangle \equiv \langle s_n \rangle \iff \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$ wie folgt:

$$[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : r \equiv s\}$$

Der kommutative Ring mit Null ${}^*\mathbb{R} = \{[r] : r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ sind unsere Hyperreellen-Zahlen, mit denen wir uns im folgenden näher beschäftigen werden.

— *unendlich große und kleine Zahlen* —

(1.1) Beispiel (positiv infinitesimal)
Sei $\varepsilon = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle = \langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$. Dann ist

$$[\![0 < \varepsilon]\!] = \{n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n}\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F},$$

also $[0] < [\varepsilon]$ in ${}^*\mathbb{R}$. Sei r eine beliebige reelle Zahl, so ist die Menge

$$[\![\varepsilon < r]\!] = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r\}$$

kofinit[1] (denn ε konvergiert gegen 0 in $\mathbb{R}$.) $\mathcal{F}$ ist kein Hauptfilter und enthält somit alle kofiniten Mengen[2] also $[\![\varepsilon < r]\!] \in \mathcal{F}$ deshalb ist $[\varepsilon] < {}^*r \in {}^*\mathbb{R}$.

Dieses $[\varepsilon]$ ist *positiv infinitesimal*. $\diamond$

(1.2) Beispiel (Unbeschränkt)
Sei $\omega = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$. Dann gilt für alle $r \in \mathbb{R}$, dass die Menge

$$[\![r < \omega]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r < n\} \in \mathcal{F}$$

kofinit ist (folgt aus dem archimedischen Axiom) und folglich in $\mathcal{F}$. Daher ist ${}^*r < [\omega]$ in ${}^*\mathbb{R}$.

Dieses $[\omega]$ ist „unendlich groß", wir nennen es *unbeschränkt*. $\diamond$

Aus der Definition folgt direkt, dass $\varepsilon \cdot \omega = 1$ und somit auch $[\omega] = [\varepsilon]^{-1}$ und $[\varepsilon] = [\omega]^{-1}$.

Die Eigenschaften, welche $[\omega]$ und $[\varepsilon]$ erfüllen, zeigen uns, dass ${}^*\mathbb{R}$ eine echte Erweiterung von $\mathbb{R}$ ist und folglich eine neue Struktur.

(1.3) Bemerkung
Für das unbeschränkte Element $[\omega]$ gilt $[\omega] \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$. $\diamond$

Beweis
Wir fassen $r \in \mathbb{R}$ als $\langle r, r, \dots \rangle$ auf. Dann ist, für alle $r \in \mathbb{R}$ die Menge

$$M = [\![r = \omega]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r = \omega_n\}$$

entweder $\emptyset$ oder gleich $\{r\}$ wenn $r \in \mathbb{N}$. Der Filter $\mathcal{F}$ ist nach Voraussetzung ein Ultrafilter aber kein Hauptfilter, und enthält folglich keine endlichen Mengen[3]. Die Menge M ist aber offensichtlich endlich, somit ist $M \notin \mathcal{F}$.

Es muss gelten ${}^*r \neq [\omega]$. $\square$

Dieser Beweis steht und fällt mit der Tatsache, dass $\mathcal{F}$ kein Hauptfilter ist.

[1] Eine kofinite Untermenge $A \subseteq X$ ist eine Menge deren Komplement $A^C \subseteq X$ endlich ist.
[2] Dies ist eine in den vorherigen Vorträgen gezeigte Eigenschaft von Filtern.
[3] Eine grundlegende Eigenschaft von Filtern, bewiesen in den vorherigen Vorträgen.

(1.4) Bemerkungen

a) Wäre $\mathcal{F}$ ein Hauptfilter, dann gäbe es ein festes $r \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^r = \{A \subseteq \mathbb{N} : r \in A\}.$$

Wir wählen uns eine beliebige Folge $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und sei $^*(s_r) \in {}^*\mathbb{R}$ gleich der Folge s_n an der Stelle r. Dann ist

$$\begin{aligned} [\![s = {}^*(s_r)]\!] \quad &= \{n \in \mathbb{N} : s_n = {}^*(s_r)_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : s_n = s_r\} \supseteq \{r\} \in \mathcal{F} \\ \Longrightarrow\ & [s] = {}^*(s_r) \end{aligned}$$

So hätten wir für alle Folgen s_n eine reelle Zahl gefunden, für die gelten würde $[s_n] = {}^*(s_r)$. Daraus würde folgen ${}^*\mathbb{R} = \{{}^*r : r \in \mathbb{R}\}$ und dadurch wäre ${}^*\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{R}$. Wir hätten also *nichts neues konstruiert*.

b) Wir haben gezeigt, dass wenn r eine reelle Folge mit Grenzwert 0 ist, dann ist $[r]$ infinitesimal in ${}^*\mathbb{R}$. Hat r den Grenzwert ∞, dann ist $[r]$ unbeschränkt in ${}^*\mathbb{R}$. Damit haben wir ein Zahlensystem konstruiert, mit den gewünschten Eigenschaften[4]. $\diamond$

§2 Mengenausdehnung

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ kann zu einer Teilmenge ${}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$ erweitert werden.

(2.1) Definition
Für alle $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definieren wir:

$$[r] \in {}^*A \qquad :\Longleftrightarrow \qquad [\![r \in A]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{F} \qquad \diamond$$

An dieser Stelle sollten wir uns überlegen, ob diese Definition der Hyperreellen-Zahlen mit der bisherigen Definition verträglich ist. Dafür prüfen wir, ob mit obiger Definition $A = \mathbb{R} \implies {}^*A = {}^*\mathbb{R}$ gilt. Sei also $A = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & [r] \in {}^*A = {}^*\mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow\ & [\![r \in A]\!] = [\![r \in \mathbb{R}]\!] \in \mathcal{F} \\ \Longleftrightarrow\ & \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

[4]Die konkreten Eigenschaften wurden im Vortrag „Große Mengen und Ultrafilter“ genannt.

Die Definitionen scheinen offensichtlich also kompatibel.

Nun überprüfen wir die Wohldefiniertheit der Definition. Wir stellen fest, dass fast überall $[r_n] \in {}^*A$ ist, genau dann wenn $r_n \in A$ für fast alle n ist. Also ist zu zeigen $[r] \in {}^*A \quad \text{und} \quad r \equiv r' \implies [r'] \in {}^*A$.

Dann

$$\begin{aligned} & [\![r = r']\!] \cap [\![r \in A]\!] \subseteq [\![r' \in A]\!] \\ \implies & r \equiv r' \wedge [\![r \in A]\!] \in \mathcal{F} \\ \implies & [\![r' \in A]\!] \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Somit ist unsere Definition wohldefiniert.

(2.2) Bemerkungen

a) Wir stellen fest, dass für $s \in A$ gilt $[\![s \in A]\!] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$. Also ist ${}^*s \in {}^*A$.

b) Wenn wir s mit ${}^*s$ identifizieren, können wir ${}^*A$ als Obermenge von A ansehen. Dann ist $A \subseteq {}^*A$

c) Die Elemente der Menge ${}^*A - A$ sind unsere neuen „nichtstandard“ oder „idealen“ Elemente von A die in ${}^*\mathbb{R}$ existieren. ◇

(2.3) Beispiel
Sei $A = \mathbb{N}$ und sei $\omega = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ wie zuvor.
Dann ist $[\![\omega \in \mathbb{N}]\!] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, also ist $[\omega] \in {}^*\mathbb{N}$. $[\omega]$ ist also eine „natürliche Nichtstandard-Zahl“. ◇

(2.4) Satz
Die Mengenausdehnung jeder unendlichen Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat Nichtstandard-Elemente. ◇

Für den Beweis ist unerlässlich, dass es sich bei $\mathcal{F}$ um keinen Hauptfilter handelt. Ansonsten gäbe es in ${}^*\mathbb{R}$ überhaupt gar keine Nichtstandard-Elemente.

Beweis
Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ unendlich ist, gibt es eine Folge r von Elementen aus A deren Folgenglieder alle verschieden sind. Dann ist $[\![r \in A]\!] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$, und somit $[r] \in {}^*A$. Aber für alle $s \in A$, ist die Menge $\{n : r_n = s\}$ entweder $\emptyset$ oder eine einelementige Menge, nun kann aber keines von beiden in $\mathcal{F}$ sein. Daher ist $[r] \in {}^*A - A$. □

Wie wir sehen werden, ist auch die Umkehrung des Satzes richtig.

(2.5) Beispiele

a) Wenn A endlich ist, dann ist $^*A = A$ und A enthält somit keine Nichtstandard-Elemente.

Beweis

Es genügt zu zeigen: $^*A \subseteq A$ mit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ und $|A| = n$.
Nun ist

$$\begin{aligned}
[r] \in {}^*A &\iff [\![r \ \in A]\!] \in \mathcal{F} \\
&\iff \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{F} \\
&\iff \{n \in \mathbb{N} : r_n = a_1\} \cup \dots \cup \{n \in \mathbb{N} : r_n = a_n\} \in \mathcal{F} \\
&\iff \underbrace{[\![r = a_1]\!]}_{:=A_1} \cup \dots \cup \underbrace{[\![r = a_n]\!]}_{:=A_n} \in \mathcal{F} \\
&\overset{***}{\implies} \exists! i \quad 1 \leq i \leq n : A_i \in \mathcal{F} \\
&\implies [r] = a_i \\
&\implies [r] \in A \\
&\implies {}^*A \subseteq A
\end{aligned}$$

Die Aussage *** folgt aus dem Korollar (2.3) aus dem Vortrag „Große Mengen und Ultrafilter“, denn A ist nach Voraussetzung endlich. □

b) $A \subseteq B \iff {}^*A \subseteq {}^*B$

Beweis

„ $\implies$ “: Zeige zunächst die Hinrichtung:

$$\begin{aligned}
[r] \in {}^*A &\iff [\![r \in A]\!] \in \mathcal{F} \\
&\iff \{\in \mathbb{N} : r_n \in A\} =: M \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Nun ist zu zeigen $\{\in \mathbb{N} : r_n \in B\} =: N \in \mathcal{F}$. Nach Voraussetzung ist $A \subseteq B$, dann ist $M \subseteq N$ und weiter $N \in \mathcal{F}$ mit den Filtereigenschaften.
Somit gilt: ${}^*A \subseteq {}^*B$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $x \in A$. Dann gilt $x \in {}^*A \subseteq {}^*B$, also ist $[\![x \in B]\!] = \{n \in \mathbb{N} : x \in B\} \in \mathcal{F}$.
Daraus folgt $[\![{}^*x \in B]\!] = \mathbb{N}$ und somit $x \in B$. □

c) ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$

Beweis
Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
{}^*(A \cap B) &\iff \{r : r \in {}^*(A \cap B)\} \\
&\iff [\![r_n \in A \cap B]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A \cap B\} \\
&\iff \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \cap \{n \in \mathbb{N} : r_n \in B\} \\
&\iff [\![r \in A]\!] \cap [\![r \in B]\!] \\
&\iff \{r : r \in {}^*A\} \cap \{r : r \in {}^*B\} \\
&\iff {}^*A \cap {}^*B
\end{aligned}$$

□

d) Was für endliche Vereinigungen gilt, gilt für unendlich nicht.
Es ist ${}^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \subsetneq \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*A_n$.

Beweis
Es ist offensichtlich $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$ und folglich enthält ${}^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = {}^*\mathbb{R}$ unbeschränkte Elemente.
Aber: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist ${}^*[-n, n] = \{x \in {}^*\mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$. Diese Aussage wird später gezeigt. Somit gilt für jedes $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*A : \exists n \in \mathbb{N}$ mit $x \in {}^*A_n \subseteq {}^*[-n, n]$. Also sind alle Elemente von $\bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*A_n$ beschränkt. Daher gilt ${}^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \subsetneq= \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*A_n$.

Zeige nun ${}^*[-n, n] = \{x \in {}^*\mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}$:

$$\begin{aligned}
[r] \in {}^*[-n, n] &\iff \{k \in \mathbb{N} : r_k \in [-n, n]\} \in \mathcal{F} \\
&\iff \{k \in \mathbb{N} : -n \leq r_k \leq n\} \in \mathcal{F} \\
&\iff \{k \in \mathbb{N} : -n \leq r_k\} \cap \{k \in \mathbb{N} : r_k \leq n\} \in \mathcal{F} \\
&\overset{\text{Filter}}{\iff} -n \leq [r] \wedge [r] \leq n
\end{aligned}$$

□

e) Zeige das für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt ${}^*A \cap \mathbb{R} = A$.

Beweis
„$\subseteq$" Sei $[r] \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nun ist $[\![r \in A]\!] \in \mathcal{F}$ und $\exists s \in \mathbb{R}$ mit $[R] = {}^*s$. Weiter gilt dann $\mathcal{F} \ni \{n \in \mathbb{N} : s \in A\} \supseteq \underbrace{[\![r \in A]\!]}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{[\![r = {}^*s]\!]}_{\in \mathcal{F}}$. Dann ist $\emptyset \neq \{n \in \mathbb{N} : s \in A$ und somit $s \in A$. Wir haben also $[r] = {}^*s \in A$.

„$\supseteq$" Identifiziere A mit $\{{}^*s \in {}^*\mathbb{R} : {}^*s \in A\}$. Dann ist $A \subseteq \mathbb{R} \cap {}^*A$, denn $a \subseteq \mathbb{R}$ und $A \subseteq {}^*A$. □

§3 Fortsetzen von Funktionen

Nachdem wir nun hyperreelle Mengen haben kann man sich überlegen, wie man Funktionen auf diesen Mengen definiert.

(3.1) Definition
Sei $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $f \circ r$ die Folge $\langle f(r_1), f(r_2), \ldots \rangle$. Setze nun

$$^*f([r]) = [f \circ r].$$

Anders gesagt:

$$^*f([\langle r_1, r_2, \ldots \rangle]) = [\langle f(r_1), f(r_2), \ldots \rangle]$$

oder in der einfachen Schreibweise

$$^*f([r_n]) = [f(r_n)]$$

Dann ist $^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ die auf $^*\mathbb{R}$ *ausgedehnte Funktion* von f. ◇

(3.2) Bemerkungen

a) Die obige Definition ist gerechtfertigt, denn $^*f$ ist wohldefiniert.
Aus $[\![r = r']\!] \subseteq [\![f \circ r = f \circ r']\!]$ folgt $r \equiv r' \implies f \circ r \equiv f \circ r'$.

b) Insbesondere erfüllt $^*f$ das fast-überall-Kriterium:

$$\begin{aligned} {}^*f([r]) = [s] &\iff [\![f \circ r = s]\!] \in \mathcal{F} \\ &\iff \{n \in \mathbb{N} : f(r_n) = s_n\} \in \mathcal{F} \\ &\iff f(r_n) = s_n \text{ für fast alle } n. \end{aligned}$$ ◇

Dieses Konzept wollen wir gleich anwenden und diskutieren folgende Beispiele.

(3.3) Beispiele

a) Die Sinus-Funktion kann auf ganz $^*\mathbb{R}$ erweitert werden, durch

$$^*\sin([r]) = [\langle \sin(r_1), \sin(r_2), \ldots \rangle] = [\sin(r_n)].$$

b) $^*f$ stimmt mit f auf $\mathbb{R}$ überein. Also gilt für alle $r \in \mathbb{R} : {}^*f(r) = f(r)$.

Beweis
Wir identifizieren $r \in \mathbb{R}$ wieder mit der konstanten Folge $^*r = [r] = \langle r, r, \dots \rangle$:

$$^*f(^*r) = [\langle f(r), f(r), \dots \rangle] = {}^*(f(r)) \text{ für alle } r \in \mathbb{R}$$

Also ist $^*f$ die Fortsetzung von f. □

c) Wenn f injektiv ist, so ist $^*f$ auch injektiv.
Ebenso wird auch die Surjektivität übertragen.

Beweis
Injektivität: Sei $[r], [s] \in {}^*\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion und die Funktion $^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ die Fortsetzung von f.

$$f([r]) = f([s]) \implies \{n \in \mathbb{N} : f(r_n) = f(s_n)\} =: M \in \mathcal{F}$$

Wegen der Injektivität von f folgt $M \subseteq [\![r = s]\!] \in \mathcal{F}$, also $[r] = [s]$.

Surjektivität: Sei $[r], [t] \in {}^*\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine surjektive Funktion und die Funktion $^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ die Fortsetzung von f.

$$f([r]) = [t] \implies \{n \in \mathbb{N} : f(r_n) = t_n\} \in \mathcal{F}$$

Weil r_n und t_n reelle Folgen sind, existiert für jedes einzelne Folgenglied $r_i \in \mathbb{R}$ der Folge r_n ein $t_i \in \mathbb{R}$ mit $f(r_i) = t_i$ und $i \in \mathbb{N}$. Nun identifizieren wir die t_i mit der Folge $\langle t_1, t_2, \dots \rangle = t_n$. Dies gilt offensichtlich für jede beliebige reelle Folge r_n.

$$\implies \forall [r] \in {}^*\mathbb{R} \exists [t] \in {}^*\mathbb{R} \text{ mit } {}^*f([r]) = [t] \quad \implies {}^*f \text{ ist surjektiv}$$ □

d) Für $x \in {}^*\mathbb{R}$, ist die Betragsfunktion wie immer definiert durch

$$|\bullet| : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}_0^+, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x > 0, \\ 0 & \text{, falls } x = 0, \\ -x & \text{, falls } x < 0, \end{cases}$$

Dann ist $|[r]| = [\langle |r_1|, |r_2|, \dots \rangle] = [|r_n|]$.

Beweis
Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$, $\quad x = [r] \iff [\![x = r]\!] \in \mathcal{F}$. Dann gibt es die folgenden drei Fälle:

$x > 0$: Dann ist $\{n \in \mathbb{N} : r_n > 0\} \in \mathcal{F}$. Also haben wir direkt:
$\{n \in \mathbb{N} : |x|_n = |r_n|\} \in \mathcal{F}$.

$x = 0$: Dann ist $\{n \in \mathbb{N} : r_n = 0\} \in \mathcal{F}$. Also haben wir:
$\{n \in \mathbb{N} : |x|_n = |r_n|\} \in \mathcal{F}$.

$x < 0$: Dann ist $\{n \in \mathbb{N} : r_n < 0\} \in \mathcal{F}$. Also haben wir:
$\{n \in \mathbb{N} : |x|_n = |r_n|\} \in \mathcal{F}$.

Insgesamt folgt die Betragsfunktion erweitert sich auf die Hyperreellen-Zahlen, durch:

$$|x| = [|r|].$$

□

e) Sei χ_A die charakteristische Funktion der Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist ${}^*(\chi_A) = \chi_{{}^*A}$.

Beweis
Sei $[r] \in {}^*\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} {}^*(\chi_A)([r]) = [1] &\iff \chi_A(r_n) = 1 && \text{fast überall} \\ &\iff r_n \in A && \text{fast überall} \\ &\iff [r] \in {}^*A \\ &\iff \chi_{{}^*A}([r]) = 1 \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} {}^*(\chi_A)([r]) = [0] &\iff \chi_A(r_n) = 0 && \text{fast überall} \\ &\iff r_n \notin A && \text{fast überall} \\ &\iff [r] \notin {}^*A \\ &\iff \chi_{{}^*A}([r]) = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt somit für beide (und insbesondere alle) möglichen Werte der charakteristischen Funktion, also ist ${}^*(\chi_A) = \chi_{{}^*A}$. □

§4 Partielle Funktionen und Hyperfolgen

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion deren Definitionsbereich eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Dann erweitert sich f zu ${}^*f : {}^*A \to {}^*\mathbb{R}$ mit der Ausdehnung von A als Definitionsbereich. $D_{{}^*f} = {}^*(D_f)$ Diese Erweiterung definieren wir wie folgt:

(4.1) Definition
Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion deren Definitionsbereich eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Dann erweitert sich f zu ${}^*f : {}^*A \to {}^*\mathbb{R}$ mit der Erweiterung von A als Definitionsbereich.

$$D_{{}^*f} = {}^*(D_f)$$

Diese Erweiterung definieren wir wie folgt:
Nehme $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $[r] \in {}^*A$, so dass $[\![r \in A]\!] = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{F}$. Sei

$$s_n = \begin{cases} f(r_n) & \text{falls } n \in [\![r \in A]\!], \\ 0 & \text{falls } n \notin [\![r \in A]\!] \end{cases}$$

Dann setze

$${}^*f([r]) = [s].$$

Es reicht, wenn s_n für fast alle n definiert ist. ◇

Letztendlich haben wir nun ${}^*f([r_n]) = [f(r_n)]$ definiert wie in 3.1 mit dem Unterschied, dass $f(r_n)$ eventuell für manche n nicht definiert ist. Diese Konstruktion ist aber zulässig, da $f(r_n)$ fast überall existiert.

Unsere neue Definition setzt f fort. Denn für $r \in A$ ist ${}^*f({}^*r) = {}^*s = {}^*(s) = {}^*(f(r))$. Wenn wir nun ${}^*r$ mit r und ${}^*f$ mit f identifizieren, dann haben wir wie gewünscht ${}^*f(r) = f(r)$.

(4.2) Definition (Hyperfolgen)
Eine reell-wertige Folge ist eine Abbildung $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, und diese Konstruktion dehnt sich aus zu einer *Hyperfolge*, welche eine Abbildung $s : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ ist. Dadurch ist der Ausdruck s_n nun auch für $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ definiert. ◇

§5 erweiterte Relationen

Das Konzept der fortgesetzten Funktion wollen wir nun verallgemeinern, indem wir nun k-wertige Relationen betrachten. Eine Relation P auf $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}^k$. Wir schreiben $(a_1, \ldots, a_k) \in P \iff: P(a_1, \ldots, a_k)$.

(5.1) Definition (Hyper-Relation)
Zunächst definieren wir für die Relation P auf $\mathbb{R}$ und die Folgen $r^1, \ldots, r^k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$[\![P(r^1, \ldots, r^k)]\!] = \{n \in \mathbb{N} : P(r^1_n, \ldots, r^k_n)\}$$

Nun erweitern wir P zu ${}^*P$ einer k-wertigen *Hyper-Relation* auf ${}^*\mathbb{R}$, d.h. einer Teilmenge von $({}^*\mathbb{R})^k$. Wir schreiben ${}^*P([r^1], \ldots, [r^k])$ um auszudrücken, dass k-Tupel $\langle [r^1], \ldots, [r^k] \rangle$ zu ${}^*P$ gehört. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} {}^*P([r^1], \ldots, [r^k]) &\iff [\![P(r^1, \ldots, r^k)]\!] \in \mathcal{F} \\ &\iff P(r^1_n, \ldots, r^k_n) \text{ für fast alle } n. \end{aligned} \qquad \diamond$$

(5.2) Bemerkungen

a) Die Notation aus (5.1) ist wohldefiniert, denn

$$M := [\![r^1 = s^1]\!] \cap \cdots \cap [\![r^k = s^k]\!] \cap [\![P(r^1, \ldots, r^k)]\!]$$

Sei nun $n \in M$. Dann gilt $r^j_n = s^j_n$ für alle $j \in \underline{k}$ und $P(r^1_n, \ldots, r^k_n)$. Somit folgt $P(r^1_n, \ldots, r^k_n) \iff P(s^1_n, \ldots, s^k_n)$.

Also ist $[\![P(s^1, \ldots, s^k)]\!] \in \mathcal{F}$, falls $r^1 \equiv s^1 \wedge \cdots \wedge r^k \equiv s^k \wedge [\![P(r^1, \ldots, r^k)]\!] \in \mathcal{F}$ sind.

b) Wenn $r^1, \ldots, r^k \in \mathbb{R}$ sind, kann man leicht sehen, dass ${}^*P$ eine Erweiterung von P ist:

$$P(r^1, \ldots, r^k) \iff {}^*P({}^*r^1, \ldots, {}^*r^k) \qquad \diamond$$

Wir stellen fest die Definition 5.1 erfasst unsere Definitionen aus den vorherigen Abschnitten wie folgt.

(5.3) Bemerkungen

a) Eine Teilmenge $A \in \mathbb{R}$ ist eine einelementige Relation ($k = 1$), somit ist die Definition der Mengenerweiterung ${}^*A$ in (2.1) ein Spezialfall von (5.1)

b) Wenn P eine der Relationen $=, <, >, \leq$ auf $\mathbb{R}$ ist, dann ist ${}^*P$ die korrespondierende Relation, wie wir sie auf ${}^*\mathbb{R}$ definiert haben, weil

$$\begin{aligned} [r] = [s] &\iff [\![r = s]\!] \in \mathcal{F} \\ [r] < [s] &\iff [\![r < s]\!] \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

und so weiter.

c) Eine m-dimensionale Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ kann über ihren $(m+1)$-dimensionalen Graphen identifiziert werden:

$$\text{graph } f = \{\langle r^1, \dots, r^m, s\rangle : f(r^1, \dots, r^m) = s\}.$$

Dann ist die Erweiterung von graph f nach ${}^*\mathbb{R}$, einfach der Graph der erweiterten Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R}^m \to {}^*\mathbb{R}$, d.h.

$${}^*(\text{graph } f) = \text{graph } ({}^*f).$$

Darüber hinaus ist graph f auch definiert wenn f eine partielle Funktion ist.

Beweis
Sei $A \in \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Identifiziere f nun mit ihrem Graphen:

$$\text{graph } f = \{(r, s) \in A \times \mathbb{R} : f(r) = s\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Setze $P :=$ graph f. Dann gilt für alle $([r], [s]) \in {}^*(A \times \mathbb{R}) \overset{d)}{=} {}^*A \times {}^*\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} {}^*P([r], [s]) &\iff [\![P((r, s)]\!] \in \mathcal{F} \\ &\iff \{n \in \mathbb{N} : (r_n, s_n) \in \text{graph } f\} \in \mathcal{F} \\ &\iff \{n \in \mathbb{N} : (r_n, s_n) \in A \times \mathbb{R} \text{ und } f(r_n) = s_n\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Andererseits gilt für jedes $[r] \in {}^*A$, dass ${}^*f([r]) = [t]$ mit

$$t_n = \begin{cases} f(r_n) & , n \in [\![r \in A]\!] \\ 0 & , n \notin [\![r \in A]\!] \end{cases}$$

nach Definition, das heißt $t_n := f(r_n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\{n \in \mathbb{N} : \quad t_n = s_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{F} \\ \iff &\{n \in \mathbb{N} : f(r_n) = s_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} \in \mathcal{F} \\ \iff &\{n \in \mathbb{N} : (r_n, s_n) \in A \times \mathbb{R} \text{ und } f(r_n) = s_n\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt: ${}^*P([r], [s]) \iff {}^*f([r]) = [s]$ und daher ${}^*(\text{graph } f) = \text{graph } ({}^*f)$.

Nun für m-wertige Funktionen:
Seien $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, r^1, \dots, r^m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Definiere ${}^*f([r^1], \dots, [r^m]) := [f \circ (r^1, \dots, r^m)]$, das heißt

$$^*f([\langle r_1^1, r_2^1, \dots \rangle], \dots, [\langle r_1^m, r_2^m, \dots \rangle]) = [\langle f(r_1^1, \dots, r_1^m), f(r_2^1, \dots, r_2^m), \dots \rangle]$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} ^*(\text{graph } f) &= \{([r^1], \dots, [r^m], [s]) \in {}^*\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} | [\![(r^1, \dots, r^m, s) \in \text{graph } f]\!] \in \mathcal{F}\} \\ &= \{([r^1], \dots, [r^m], [s]) \in {}^*\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} | [\![f \circ (r^1, \dots, r^m) = s]\!] \in \mathcal{F}\} \\ &= \{([r^1], \dots, [r^m], [s]) \in {}^*\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} | [\![{}^*f([r^1], \dots, [r^m]) = [s]\} \\ &= \text{graph } ({}^*f) \end{aligned}$$

□

d) Es ist kein Problem abgekürzt ${}^*\mathbb{R}^k$ zu schreiben, denn ${}^*(\mathbb{R}^k) = ({}^*\mathbb{R})^k$ und es obliegt keine Verwechslungsgefahr.
Beweis
Seien $A_1, \dots, A_k$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ und ${}^*A_1, \dots, {}^*A_k \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} & [(r^1, \dots, r^k)] \in {}^*(A_1 \times \cdots \times A_k) \\ \iff & \{n \in \mathbb{N} : (r_n^1, \dots, r_n^k) \in A_1 \times a_k\} \in \mathcal{F} \\ \iff & \{n \in \mathbb{N} : r_n^1 \in A_1 \wedge \dots r_n^k \in A_k\} \in \mathcal{F} \\ \iff & \{n \in \mathbb{N} : r_n^1 \in A_1\} \cap \cdots \cap \{n \in \mathbb{N} : r_n^k \in A_k\} \in \mathcal{F} \\ \overset{\text{UF}}{\iff} & [\![r^1 \in A_1]\!] \wedge \cdots \wedge [\![r^k \in A_k]\!] \in \mathcal{F} \\ \iff & ([r^1], \dots, [r^k]) \in {}^*A_1 \times \cdots \times {}^*A_k \end{aligned}$$

□

(5.4) Beispiel
Weitergehend ist sogar für eine m-dimensionale erweiterte partielle Funktion ${}^*f$ die Definitionsmenge gegeben durch: $\text{dom } {}^*f = {}^*(\text{dom } f) \subseteq {}^*\mathbb{R}^m$.
Beweis
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^k, \quad k \geq 2$ und $\text{dom } P = \{(x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^{k-1} | \exists y \in \mathbb{R} : P(x_1, \dots, x_{k-1}, y)\}$ dann gilt für alle $[r^1], \dots, [r^{k-1}] \in {}^*\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ([r^1], \dots, [r^{k-1}]) \in {}^*(\text{dom } P) &\iff [\![(r^1, \dots, r^{k-1}) \in \text{dom } P]\!] \in \mathcal{F} \\ &\iff \{n \in \mathbb{N} | (r_n^1, \dots, r_n^{k-1}) \in \text{dom } P\} \in \mathcal{F} \\ &\iff \{n \in \mathbb{N} | \exists s_n : P(r_n^1, \dots, r_n^{k-1}, s_n)\} \in \mathcal{F} \\ &\iff \exists [s] \in {}^*\mathbb{R} : {}^*P([r^1], \dots, [r^{k-1}], [s]) \\ &\iff ([r^1], \dots, [r^{k-1}]) \in \text{dom } ({}^*P) \end{aligned}$$

Also gilt die Aussage. □

— Sind die hyperreellen Zahlen eindeutig? —

Die von uns konstruierten hyperreellen Zahlen sind eindeutig. Wie bei den reellen Zahlen kann man zeigen, dass alle Körper, die wir so konstruieren können, isomorph zueinander sind. Dafür wird das Auswahlaxiom benötigt.