Das Transferprinzip: Von Aussagen über $\mathbb{R}$ zu Aussagen zu $^*\mathbb{R}$, und zurück

Hartmut Führ

21. November 2012

Überblick

Zur Erinnerung:

Inhalt des vierten Vortrags

Definition einer Transferabbildung: Ordne Objekten über $\mathbb{R}$ (Zahlen, Vektoren, Abbildungen, Mengen von Vektoren) jeweils Objekte gleichen Typs über ${}^*\mathbb{R}$ zu, ihre $*$-Erweiterung:

- $\mathbb{R} \ni x \mapsto [(x)] \in {}^*\mathbb{R}$. Das ist die Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R} \supset A \mapsto {}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$, dabei

$$^*A = \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\} \in \mathcal{F}\} \ .$$

- $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ wird abgebildet auf

$$^*f : [(x_n)_{n\in\mathbb{R}}] \mapsto [(f(x_n))_{n\in\mathbb{R}}] \ .$$

- Analoge Definitionen für Teilmengen von ${}^*\mathbb{R}^n$ (Relationen, Funktionen mehrerer Veränderlicher).

Zur Erinnerung:

Beobachtungen

- Der Umgang mit $*$-Erweiterungen war eher mühselig.
- Achtung: Sobald $A \subset \mathbb{R}$ unendlich ist, gilt $A \subsetneq {}^*A$.
  Aber: Es gilt $A = {}^*A \cap \mathbb{R}$.
- Allgemein: Die Abbildung eines Objektes über $\mathbb{R}$ auf seine $*$-Erweiterung ist injektiv.

Das Transferprinzip

Informelle Definition der Transferabbildung

Verwandle mittels einer einfachen "Suchen-und-Ersetzen"-Operation Aussagen über $\mathbb{R}$ in Aussagen über ${}^*\mathbb{R}$, nach folgendem Prinzip:

- Ersetze jede in der Aussage auftretende Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ durch die Erweiterung ${}^*A \subset {}^*\mathbb{R}^n$, insbesondere in allen vorkommenden Existenz- und All-Aussagen.
- Ersetze jede auftretende Relation $P \subset \mathbb{R}^m$ durch die Erweiterung ${}^*P \subset {}^*\mathbb{R}^m$.
- Ersetze jede auftretende Funktion $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$, durch ihre Erweiterung ${}^*f : {}^*\mathbb{R}^m \supset {}^*A \to {}^*\mathbb{R}$.
- Übernehme logische Verknüpfungen und Quantoren.

Theorem (Transferprinzip, schlampige Version)

Eine Aussage über $\mathbb{R}$ gilt genau dann, wenn ihre "gesternte" Version über ${}^*\mathbb{R}$ gilt.

Versuch einer Präzisierung

Theorem (Transferprinzip)

Es gibt eine Menge $\mathcal{A}$ von Aussagen über $\mathbb{R}$, eine Menge ${}^*\mathcal{A}$ von Aussagen über ${}^*\mathbb{R}$, sowie eine bijektive Transferabbildung

$$\mathcal{T} : \mathcal{A} \to {}^*\mathcal{A} \ , \ A \mapsto {}^*A$$

mit der Eigenschaft, daß A genau dann gilt, wenn ${}^*A$ gilt.

Bemerkung

Beide Richtungen des Transferprinzips sind wichtig: Der Transfer $A \mapsto {}^*A$ wird benötigt, um bereits bekannte Aussagen (etwa aus Analysis I und II) über $\mathbb{R}$ auch für ${}^*\mathbb{R}$ zu nutzen.
In der inversen Transferabbildung ${}^*A \mapsto A$ liegt der eigentliche Zweck der hyperreellen Zahlen: Wir wollen Beweise über ${}^*\mathbb{R}$ führen (weil sie dort leichter zu verstehen, oder besser lesbar sind), sind aber eigentlich interessiert an Aussagen über $\mathbb{R}$.

Überblick

Grundbausteine der Aussagenlogik

Die Mengen $\mathcal{A}$, ${}^*\mathcal{A}$ der Aussagen über $\mathbb{R}$ bzw. ${}^*\mathbb{R}$ lassen sich als Mengen formaler Ausdrücke definieren, die aus gewissen Grundbausteinen zusammengesetzt sind. Die hierbei benötigten Grundbausteine sind in die folgenden disjunkten Mengen unterteilt:

- Eine Menge von zulässigen Objekten, über die Aussagen getroffen werden sollen. Dies sind Zahlen, Funktionen, Teilmengen, aber auch Relationen (zur Beschreibung von Gleichungen, Ungleichungen etc.)
- Symbole zur logischen Verknüpfung: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow$
- Quantoren: $\forall, \exists$
- Klammer- Trennungssymbole: $(), \epsilon$
- Eine abzählbare Menge V von Variablensymbolen, etwa x, y, x', x_1, etc.

Zulässige Objekte für Aussagen über $\mathbb{R}$:

Die Menge $\mathfrak{O}$ der zulässigen Objekte für Aussagen über $\mathbb{R}$ besteht aus

- Grundmenge: Alle Elemente $x \in \mathbb{R}$.
- Zulässigen Funktionen: Alle Funktionen $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Zulässigen Relationen: Alle Teilmengen $P \subset \mathbb{R}^m$. Diese Teilmengen werden interpretiert als Relationen zwischen einer oder mehreren reellen Zahlen, $P(x_1, \ldots, x_m)$ bedeutet $(x_1, \ldots, x_m) \in P$. Auch hier ist $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Für einstellige Relationen schreiben wir auch $x \in P$ statt $P(x)$.

Zulässige Objekte für Aussagen über ${}^*\mathbb{R}$:

Die Menge ${}^*\mathfrak{O}$ der zulässigen Objekte für Aussagen über ${}^*\mathbb{R}$ besteht aus:

- Grundmenge: Alle Elemente $x \in {}^*\mathbb{R}$.
- Zulässigen Funktionen: Alle Funktionen ${}^*f : {}^*\mathbb{R}^m \supset {}^*A \to {}^*\mathbb{R}$, also alle hyperreellen Fortsetzungen von reellen Funktionen, $m \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Zulässigen Relationen: Alle Teilmengen vom Typ ${}^*P$, für $P \subset \mathbb{R}^m$, also alle hyperreellen Fortsetzungen von m-stelligen reellen Relationen, mit $m \in \mathbb{N}$ beliebig.

Zulässige Terme

Definition

Es sei $\mathfrak{O}_0 \in \{\mathfrak{O}, {}^*\mathfrak{O}\}$. Ein formaler Ausdruck über $\mathfrak{O}_0$ ist eine endliche Folge (endliches Tupel) von Elementen aus $\mathfrak{O}_0$, Symbolen zur logischen Verknüpfung, Quantoren, Variablen und Klammern.

Definition

Es sei $\mathfrak{O}_0 \in \{\mathfrak{O}, {}^*\mathfrak{O}\}$. Die Menge $\mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$ aller Terme über $\mathfrak{O}_0$ ist die induktiv wie folgt definierte Menge formaler Ausdrücke über $\mathfrak{O}_0$:

- Ist x eine Variable, so ist $x \in \mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$.
- Ist s in der Grundmenge, so $s \in \mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$.
- Ist $f \in \mathfrak{O}_0$ eine zulässige Funktion in m Variablen, und sind $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$, so ist auch $f(\tau_1, \ldots, \tau_m) \in \mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$

Erläuterung: Induktiv definierte Mengen

Bemerkung

Die induktiv definierte Menge $\mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$ ist die kleinste Menge formaler Ausdrücke über $\mathfrak{O}_0$, die abgeschlossen ist unter den in der Definition angegebenen Bildungsvorschriften. Diese Menge ist damit eindeutig definiert.

Zu jeder induktiv definierten Menge gibt es ein Induktionsprinzip: Will man etwa eine Aussage A für alle Elemente der Menge $\mathfrak{T}(\mathfrak{O})$ beweisen, so reicht hierfür folgendes zu zeigen:

- Induktionsanfang: Die Aussage A gilt für Variablen x und Elemente s der Grundmenge.
- Induktionsschritt: Ist $f \in \mathfrak{O}_0$ eine zulässige Funktion in m Variablen, und $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathfrak{T}(\mathfrak{O})$ derart, daß die Aussage A für $\tau_1, \ldots, \tau_m$ gilt, so gilt sie auch für den Term $f(\tau_1, \ldots, \tau_m) \in \mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$.

In ähnlicher Weise werden auch Abbildungen induktiv definiert (s. etwa Wert eines Terms)

Der Wert eines geschlossenen Terms

Definition

Es sei $\mathfrak{O}_0 \in \{\mathfrak{O}, {}^*\mathfrak{O}\}$. Ein Term über $\mathfrak{O}_0$, in dem keine Variablen vorkommen, heißt geschlossener Term.

Der Wert eines geschlossenen Terms τ ist ein Element aus der Grundmenge (möglicherweise nicht definiert), und wird wie folgt induktiv definiert:

- Ist $\tau = s$ in der Grundmenge, so ist s der Wert von τ.
- Es sei $\tau = f(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ mit zulässiger Funktion f und Termen $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Falls jedes τ_i definiert ist, also einen Wert s_i in der Grundmenge hat, und $(s_1, \ldots, s_m)$ im Definitionsbereich von f liegt, so ist der Wert von τ durch $f(s_1, \ldots, s_m)$ gegeben.
- In allen anderen Fällen ist der Wert von τ nicht definiert.

Satzformeln

Definition

Es sei $\mathfrak{D}_0 \in \{\mathfrak{D}, {}^*\mathfrak{D}\}$. Die Menge der Satzformeln $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_0)$ über $\mathfrak{D}_0$ ist induktiv wie folgt definiert:

- Eine atomare Satzformel über $\mathfrak{D}_0$ ist ein formaler Ausdruck der Form

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_m) \ ,$$

  dabei sind $\tau_1, \ldots, \tau_m$ Terme, und P eine zulässige Relation. Jede atomare Satzformel liegt in $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_0)$.
- Sind $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}_0)$, so auch die folgenden Ausdrücke:

$$\neg\varphi \ , \ (\varphi) \leftrightarrow (\psi) \ , \ (\varphi) \rightarrow (\psi) \ , \ (\varphi) \leftarrow (\psi) \ , \ (\varphi) \wedge (\psi) \ , \ (\varphi) \vee (\psi)$$

- Ist $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}_0)$, ist x eine Variable, und P eine zulässige einstellige Relation, dann sind auch die folgenden Ausdrück in $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_0)$

$$(\forall x \in P)\, \varphi \ , \ (\exists x \in P)\, \varphi$$

Gebundene Variablen

Definition

Es seien $\mathfrak{O}_0 \in \{\mathfrak{O}, {}^*\mathfrak{O}\}$, x eine Variable, und $\eta \in \mathfrak{F}(\mathfrak{O}_0)$ eine Satzformel. x heißt gebunden in η, wenn

- $\eta = P(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ eine atomare Satzformel ist, und x in den Termen $\tau_1, \ldots, \tau_m$ nicht vorkommt.
- η eine logische Verknüpfung ist, in einer der Formen
$$\neg\varphi \;,\; (\varphi) \leftrightarrow (\psi) \;,\; (\varphi) \rightarrow (\psi) \;,\; (\varphi) \leftarrow (\psi) \;,\; (\varphi) \wedge (\psi) \;,\; (\varphi) \vee (\psi) \;,$$
und x sowohl in φ als auch in ψ gebunden ist.
- η eine der folgenden All- oder Existenzaussagen ist:
$$(\forall x \in P)\, \psi \text{ , oder } \quad (\exists x \in P)\, \psi \;.$$

Kommt x in φ vor, ist aber nicht gebunden, so heißt x freie Variable.

Einsetzen von Werten in Terme

Definition

Es sei $\mathfrak{O}_0 \in \{\mathfrak{O}, {}^*\mathfrak{O}\}$, $\tau \in \mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$ ein Term über $\mathfrak{O}_0$, x eine Variable und s in der Grundmenge. Der colorred durch Ersetzen von x durch s in τ erhaltene Term ist ein Element $\tau(x \mapsto s)$ von $\mathfrak{T}(\mathfrak{O}_0)$ bezeichnet, das induktiv wie folgt definiert wird:

- Ist $\tau = x$, so ist $\tau(x \mapsto s) = s$.
- Ist $\tau = y$ eine Variable, $y \neq x$, so ist $\tau(x \mapsto s) = y$.
- Ist $\tau = s$ in der Grundmenge, so ist $\tau(x \mapsto s) = y$.
- Ist $\tau = f(\tau_1, \ldots, \tau_m)$, mit Termen $\tau_1, \ldots, \tau_m$, f eine zulässige Funktion in m Variablen, so ist

$$\tau(x \mapsto s) = f(\tau_1(x \mapsto s), \ldots, \tau_m(x, \mapsto s)) \ .$$

Anschaulich: Jedes Vorkommen der Variable x wird durch die Konstante s ersetzt.

Einsetzen von Werten in Satzformeln

Definition

Es $\mathfrak{D}_0 \in \{\mathfrak{D}, {}^*\mathfrak{D}\}$. Es sei $\eta \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}_0)$ eine Satzformel, x eine Variable und s in der Grundmenge. Wir definieren $\eta(x \mapsto s) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{D}_0)$ induktiv durch:

- Ist $\eta = P(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ eine atomare Satzformel, setze
$$\eta(x \mapsto s) = P(\tau_1(x \mapsto s), \ldots, \tau_m(x \mapsto s)) \ .$$
- Ist η eine logische Verknüpfung, in einer der Formen
$$\neg\varphi \ , \ (\varphi) \leftrightarrow (\psi) \ , \ (\varphi) \rightarrow (\psi) \ , \ (\varphi) \leftarrow (\psi) \ , \ (\varphi) \wedge (\psi) \ , \ (\varphi) \vee (\psi) \ ,$$
so ersetze φ durch $\varphi(x \mapsto s)$, ψ durch $\psi(x \mapsto s)$.
- Ist η eine der folgenden All- oder Existenzaussagen
$$(\forall y \in P)\,\psi \ , \text{oder} \quad (\exists y \in P)\,\psi$$
so ersetze ψ jeweils durch $\psi(x \mapsto s)$, ausser es gilt $x = y$.

Aussagen

Definition

Es sei $\mathfrak{O}_0 \in \{\mathfrak{O}, {}^*\mathfrak{O}\}$. Eine Aussage über $\mathfrak{O}_0$ ist eine Satzformel $\varphi \in \mathfrak{F}(\mathfrak{O}_0)$ ohne freie Variablen. Eine atomare Aussage ist eine Aussage der Form

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_m) ,$$

dabei ist P eine zulässige Relation, und die τ_i sind sämtlich geschlossene Terme.

Wahre Aussagen

Definition

Es seien $\mathfrak{D}_0 \in \{\mathfrak{D}, {}^*\mathfrak{D}\}$. Es sei Ψ eine Aussage über $\mathfrak{D}_0$. Der Wahrheitswert von Ψ ist ein Element von $\{\mathit{wahr}, \mathit{falsch}\}$, und wie folgt definiert:

- Eine atomare Aussage $P(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ nimmt den Wert *wahr* an genau dann, wenn alle $\tau_1, \ldots, \tau_m$ definiert sind, und $(\tau_1, \ldots, \tau_m) \in P$ gilt. Er ist undefiniert, wenn ein τ_i undefiniert ist.
- Ist Ψ einer der Ausdrücke

  $$\neg(\varphi)\ ,\ (\varphi) \leftrightarrow (\psi)\ ,\ (\varphi) \rightarrow (\psi)\ ,\ (\varphi) \leftarrow (\psi)\ ,\ (\varphi) \wedge (\psi)\ ,\ (\varphi) \vee (\psi)\ ,$$

  so bestimmt sich der Wahrheitswert von Ψ aus den Wahrheitswerten für φ, ψ anhand der üblichen Rechenregeln für Negation, Implikation, logische und/oder-Verknüpfung.
  Speziell gilt also: $(\varphi) \rightarrow (\psi)$ hat den Wahrheitswert *wahr* genau dann, wenn φ den Wahrheitswert *falsch* hat, oder wenn ψ den Wahrheitswert *wahr* hat.

(Fortsetzung s. nächste Folie)

Wahre Aussagen, Fortsetzung

Definition fortgesetzt

- Ist P zulässige einstellige Relation und Ψ eine Aussage der Form
$$(\forall x \in P)\, \varphi \ ,$$
so hat Ψ den Wert *wahr* genau dann, wenn der Wahrheitswert von $\varphi(x \mapsto s)$ für alle $s \in P$ (definiert und) *wahr* ist. Falls es für ein $s \in P$ nicht definiert ist, ist der Wert undefiniert.
- Ist P zulässige einstellige Relation und Ψ eine Aussage der Form
$$(\exists x \in P)\, \varphi \ ,$$
so hat Ψ den Wert *wahr* genau dann, wenn der Wahrheitswert von $\varphi(x \mapsto s)$ für mindestens ein $s \in P$ (definiert und) *wahr* ist. Er ist undefiniert, wenn $\varphi(x \mapsto s)$ undefiniert ist für alle $s \in P$.

Überblick

Definition der Transferabbildung

Definition

Es sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Aussagen über $\mathfrak{O}$, und ${}^*\mathcal{A}$ die Menge aller Aussagen über ${}^*\mathfrak{O}$. Dann wird

$$\mathcal{T} : \mathcal{A} \to {}^*\mathcal{A}\ ,\ \Psi \mapsto {}^*\Psi$$

induktiv definiert wie folgt:

- ${}^*((\varphi) \wedge (\psi)) := ({}^*\varphi) \wedge ({}^*\psi)$;
- ${}^*(\varphi \vee \psi) := ({}^*\varphi) \vee ({}^*\psi)$;
- ${}^*((\varphi) \leftarrow (\psi)) := ({}^*\varphi) \leftarrow ({}^*\psi)$;
- ${}^*((\varphi) \to (\psi)) := ({}^*\varphi) \to ({}^*\psi)$;
- ${}^*((\varphi) \leftrightarrow (\psi)) := ({}^*\varphi) \leftrightarrow ({}^*\psi)$;
- ${}^*((\forall x \in P)\varphi) := (\forall x \in {}^*P)\,{}^*\varphi$;
- ${}^*((\exists x \in P)\varphi) := (\exists x \in {}^*P)\,{}^*\varphi$;
- ${}^*(P(\tau_1, \ldots, \tau_m)) := {}^*P({}^*\tau_1, \ldots, {}^*\tau_m)$.

Formulierung des Transferprinzips

Transferprinzip

Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der Aussagen über $\mathfrak{O}$, und ${}^*\mathcal{A}$ die Menge der Aussagen über ${}^*\mathfrak{O}$. Dann ist die Transferabbildung

$$\mathcal{T} : \mathcal{A} \to {}^*\mathcal{A}\ ,\ \Psi \mapsto {}^*\Psi$$

eine Bijektion.
Zudem gilt: Ψ hat den Wahrheitswert *wahr* genau dann, wenn ${}^*\Psi$ den Wahrheitswert *wahr* hat.

Überblick

Der angeordnete Körper ${}^*\mathbb{R}$

Die Anordnung auf ${}^*\mathbb{R}$

Setzt man $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x < y\}$, so entspricht die Relation ${}^*P$ gerade der Anordnung auf $\mathbb{R}$, die im dritten Vortrag behandelt wurde:

$$([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \in {}^*P \Leftrightarrow \{n : x_n < y_n\} \in \mathcal{F}$$

Wir schreiben im Folgenden statt $(x, y) \in {}^*P$ wieder $x < y$.
Genauso: Die Körperoperationen sind $+, \cdot : {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ sind die $*$-Erweiterungen von $+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Folgerung

Die Aussage, daß $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ angeordneter Körper ist, folgt mittels Transferprinzip direkt aus der Aussage, daß $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper ist.

Überblick

Anwendung des Transferprinzips auf Funktionen

Warnung

Das Transferprinzip in der hier vorgestellten Version ist nicht anwendbar auf Aussagen der Form

$$(\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) P(f) \ .$$

Der hier eingeführte Aussagenkalkül läßt nur All- oder Existenz-Aussagen über Relationen zwischen Zahlen oder endlichen Zahlentupeln zu. Das heißt, Aussagen über Mengen Funktionen, unendlichen Zahlenfolgen etc. lassen sich nicht direkt mit dem Transferprinzip behandeln.

Aber:

Trotzdem kann man das Transferprinzip nutzen, um allgemeine Aussagen über Funktionen, Mengen etc. zu treffen.

Fazit

Benötigte Fähigkeiten zur korrekten Anwendung des Transferprinzips:

- (Korrekte) Übersetzung mathematischer Aussagen über $\mathbb{R}$ bzw. ${}^*\mathbb{R}$ in Satzformeln, und zurück.
  Achtung: Nicht jede Aussage ist in eine Satzformel übersetzbar!
- Korrekte Berechnung der Transferabbildung (leicht).

Anstelle der expliziten Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ werden wir im Folgenden weitestgehend nur die Eigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$ verwenden, genauer:

- Die Inklusion $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$;
- die Eigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$ als angeordneter Körper;
- das Transferprinzip.