Die Anordnung auf den hyperreellen Zahlen

Vortrag zum Proseminar Nonstandard Analysis
28.11.2012

Christoph Esser
Matrikelnummer: 309037

Inhaltsverzeichnis

In den Vorträgen ”Konstruktion der hyperrellen Zahlen” und ”Infinitesimale und unbeschränkte Zahlen” haben wir bereits die hyperreellen Zahlen kennengelernt. Dabei werden die Elemente aus $\mathbb{R}$ reelle Zahlen genannt und als Standardzahlen bezeichnet. Die Elemente aus *$\mathbb{R}$ hingegen bezeichnet man als *hyperreelle Zahlen* und nennt sie auch *Nichtstandardzahlen*. Aus diesem Grund wird die Analysis, welche die Menge der hyperreellen Zahlen verwendet, auch Nichtstandard-Analysis genannt. *$\mathbb{R}$ besteht dabei aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, welche also eine Teilmenge von *$\mathbb{R}$ bilden, sowie deren infinitesimal benachbarten Zahlen und damit insbesondere den infinitesimalen Zahlen, sowie den unendlich großen Zahlen.
Dementsprechend bezeichnet *$\mathbb{Z}$ die hyperganzen Zahlen, *$\mathbb{N}$ die hypernatürlichen Zahlen und *$\mathbb{Q}$ die hyperrationalen Zahlen. Dabei besteht *$\mathbb{Z}$ aus den ganzen Zahlen, erweitert um unendlich große und unendlich kleine ganze Zahlen und *$\mathbb{N}$ besteht aus den natürlichen Zahlen, sowie aus unendlich großen ganzen Zahlen. Weiterhin umfasst *$\mathbb{Q}$ die Quotienten $\frac{m}{n}$ von hyperganzen $m, n \in {}^*\mathbb{Z}$. Dies folgt unmittelbar aus dem Tranfer des Satzes $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{Z}$ mit $z \neq 0 \wedge x = \frac{y}{z}$.

In meinem Vortrag sollen nun weitere Eigenschaften der hyperreellen Zahlen erörtert werden. Dazu beschäftige ich mich mit den Begriffen infinitesimal, unbeschränkt, beschränkt und abschätzbar. Desweiteren untersuche ich die gegenseitige Lage von reellen und hyperreellen Zahlen um Aussagen über die Anordnung der hyperrellen Zahlen zu treffen.

Die Grundlage für diese Ausarbeitung ist der Abschnitt 5 ”Hyperreals Great and Small” aus dem Buch ”Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis” von Robert Goldblatt.
Die dort nicht ausgeführten Beweise und Aufgabenlösungen habe ich selbstständig erarbeitet.

§1 Eigenschaften der hyperreellen Zahlen

Zunächst werde ich einige wichtige Definitionen im Zusammenhang mit den hyperreellen Zahlen erläutern, die für den weiteren Verlauf des Vortrages wichtig sind:

(1.1) Definition ((Un-)beschränkt, infinitesimal und abschätzbar)
Eine hyperreelle Zahl b ist:

- beschränkt, wenn $r, s \in \mathbb{R}$ existieren mit $r < b < s$;
- positiv unbeschränkt, wenn $r < b$ für alle $r \in \mathbb{R}$;

- negativ unbeschränkt, wenn $b < r$ für alle $r \in \mathbb{R}$;
- unbeschränkt, wenn sie positiv oder negativ unbeschränkt ist;
- positiv infinitesimal, wenn $0 < b < r$ für alle positiven $r \in \mathbb{R}$;
- negativ infinitesimal, wenn $r < b < 0$ für alle negatien $r \in \mathbb{R}$;
- infinitesimal, wenn sie positiv infinitesimal, negativ infinitesimal oder 0 ist;
- abschätzbar, wenn sie beschränkt, aber nicht infinitesimal ist, das heißt es existieren $r, s \in \mathbb{R}^+$ mit $r < |b| < s$. $\diamond$

Die Begriffe aus Definition (1.1) führen zu folgenden Aussagen.

(1.2) Lemma
Eine hyperreelle Zahl b ist:

a) beschränkt genau dann wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $|b| < n$;

b) unbeschränkt genau dann wenn $|b| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

c) infinitesimal genau dann wenn $|b| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

d) abschätzbar genau dann wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{n} < |b| < n$. $\diamond$

Beweis
a) "$\Rightarrow$":
Sei b beschränkt. Dann existieren nach Definition (1.1) $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < b < s$. Aus dem Archimedischen Axiom folgt, dass es natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(-m) < r$ und $s < n$ gilt. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n > m$. Dann gilt $|b| < n$.

"$\Leftarrow$":
Es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b| < n$. Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der reellen Zahlen. Dies bedeutet, dass für $n \in \mathbb{N}$ auch $n \in \mathbb{R}$ gilt. Aus $|b| < n$ folgt dann aber $-n < b < n$ für ein $n \in \mathbb{R}$. Damit ist b beschränkt.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass b genau dann beschränkt ist, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|b| < n$.

b) "$\Rightarrow$":
Sei b unbeschränkt. Dann gilt nach Definition (1.1) entweder $r < b$ für alle $r \in \mathbb{R}$ oder $b < r$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Betrachte zunächst den Fall, dass b positiv unbeschränkt ist. Da es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, die größer als n ist, gilt $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists s = s(n) \in \mathbb{R} : n < s < b$. Für den Fall, dass b negativ unbeschränkt ist, gilt: Zu jeder natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$, die kleiner als $(-m)$ ist. Damit erhält man: $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists t = t(m) \in \mathbb{R} : (-m) > t > b$. Damit können wir folgern: $\forall n \in \mathbb{N}$: $n < b \vee b < (-n)$.

"$\Leftarrow$":
Es gilt $|b| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Archimedischen Axiom folgt, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl r gibt, die kleiner als n ist. Also $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists r = r(n) \in \mathbb{R} : r < n < |b|$. Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind, gibt es zu jeder reellen Zahl eine natürliche Zahl, die größer ist. Da $|b|$ jedoch größer als jede natürliche Zahl ist, ist $|b|$ demnach auch größer als jede reelle Zahl.
Es ist also $r < |b|$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet entweder $r < b$ für alle $r \in \mathbb{R}$, dann ist b positiv unbeschränkt, oder $r > b$, für alle $r \in \mathbb{R}$, dann ist b negativ unbeschränkt.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass b genau dann unbeschränkt ist, wenn $|b| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) "$\Rightarrow$":
Sei b infinitesimal. Dann gilt nach Definition (1.1) entweder $0 < b < r$ für alle positiven $r \in \mathbb{R}$ oder $r < b < 0$ für alle negativen $r \in \mathbb{R}$. Es gibt zu jeder rationalen Zahl der Form $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$, sodass $s < \frac{1}{n}$ gilt. Für den Fall, dass b positiv infinitesimal ist, gilt demnach für alle $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} > s > b > 0$. Wenn b negativ infinitesimal ist, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $-\frac{1}{n} < s < b < 0$.

"$\Leftarrow$":
Es gilt $|b| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass es zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ eine rationale Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gibt, für die gilt $|\frac{p}{q}| < |r|$. Da die Menge der natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist, gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \cdot p > q$ ist. Dies folgt aus dem Archimedischen Axiom.
Dann gilt: $|r| > |\frac{p}{q} > |\frac{p}{n \cdot p}| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$. Da nach Voraussetzung aber $\frac{1}{n} > |b|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, gilt $|r| > |b|$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Damit ist b infinitesimal.

Insgesamt folgt damit also, dass b genau dann infinitesimal ist, wenn $|b| < \frac{1}{n}$ gilt.

d) "$\Rightarrow$":
Sei b abschätzbar. Nach Definition (1.1) bedeutet dies, dass b beschränkt, aber nicht infinitesimal ist. Da b also beschränkt ist, folgt nach a), dass $|b| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da b weiterhin nicht infinitesimal ist, folgt aus c), dass $|b| > \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zusammen bedeutet dies also $\frac{1}{n} < |b| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

"$\Leftarrow$":
Es gilt $\frac{1}{n} < |b| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Da die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen sind, gilt $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{R}$. Weiterhin sind $\frac{1}{n} > 0$ und $n > 0$. Damit existieren aber $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{1}{n} < |b| < n$ gilt und b ist nach Definition (1.1) abschätzbar.

Aus den Definitionen (1.1) folgt direkt, dass alle reellen und alle infinitesimalen Zahlen beschränkt sind. Die einzige infinitesimale Zahl, die eine reelle Zahl ist, ist die 0. Alle anderen reellen Zahlen sind abschätzbar. Eine abschätzbare Zahl ist weder infinitesimal klein, noch unendlich groß.

Desweiteren wird die Menge aller beschränkten Zahlen mit $\mathbb{L}$ (limited) und die Menge aller infinitesimalen Zahlen mit $\mathbb{I}$ (infinitesimal) bezeichnet.

§2 Arithmetik der hyperreellen Zahlen

In diesem Abschnitt werde ich die Arithmetik der hyperreellen Zahlen erörtern, welche für den Umgang mit hyperreellen Zahlen im Laufe des Vortrages von Bedeutung ist.

(2.1) Lemma
Seien δ und ε infinitesimal, b und c abschätzbar und H und K unbeschränkt. Dann gilt für:

- Summe:
  a) $\varepsilon + \delta$ ist infinitesimal
  b) $b + \varepsilon$ ist abschätzbar
  c) $b + c$ ist beschränkt (eventuell sogar infinitesimal)
  d) $H + \varepsilon$ und $H + b$ sind unbeschränkt
- Vorzeichenwechsel:

a) $-\varepsilon$ ist infinitesimal

b) $-b$ ist abschätzbar

c) $-H$ ist unbeschränkt

- Produkt:

a) $\varepsilon \cdot \delta$ und $\varepsilon \cdot b$ sind infinitesimal

b) $b \cdot c$ ist abschätzbar

c) $b \cdot H$ und $H \cdot K$ sind unbeschränkt

- Kehrwert:

a) $\frac{1}{\varepsilon}$ ist unbeschränkt, falls $\varepsilon \neq 0$

b) $\frac{1}{b}$ ist abschätzbar, falls $b \neq 0$

c) $\frac{1}{H}$ ist infinitesimal

- Quotient:

a) $\frac{\varepsilon}{b}$, $\frac{\varepsilon}{H}$ und $\frac{b}{H}$ sind infinitesimal

b) $\frac{b}{c}$ ist abschätzbar (falls $c \neq 0$)

c) $\frac{b}{\varepsilon}$, $\frac{H}{\varepsilon}$ und $\frac{H}{b}$ sind unbeschränkt (ε , $b \neq 0$)

- Wurzel:

a) Wenn $\varepsilon > 0$, dann ist $\sqrt[n]{\varepsilon}$ infinitesimal

b) Wenn $b > 0$, dann ist $\sqrt[n]{b}$ abschätzbar

c) Wenn $H > 0$, dann ist $\sqrt[n]{H}$ unbeschränkt

- Unbestimmte Formen:

$\frac{\varepsilon}{\delta}$, $\frac{H}{K}$, $\varepsilon \cdot H$, $H + K$ ◇

Beweis
Im Folgenden sollen einige Beweise exemplarisch dargestellt werden.

Seien ε und δ infinitesimal, das heißt $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$ und $|\delta| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, b und c abschätzbar, das heißt $\frac{1}{n} < |b| < n$ und $\frac{1}{n} < |c| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und H unbeschränkt, das heißt $|H| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Summe:

  a) Zu zeigen: $\varepsilon + \delta$ ist infinitesimal, also $|\varepsilon + \delta| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  Beweis: ε ist infinitesimal, also $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus jedoch direkt folgt, dass auch $|\varepsilon| < \frac{1}{2 \cdot n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist entscheidend, dass die erste Aussage für alle natürlichen Zahlen n gilt.
  Betrachte nun $|\varepsilon + \delta| \leq |\varepsilon| + |\delta| < \frac{1}{2 \cdot n} + \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{2}{2 \cdot n} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  Damit folgt die Behauptung.

  b) Zu zeigen: $b + \varepsilon$ ist abschätzbar, also $\frac{1}{n} < |b + \varepsilon| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$
  Beweis: Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|b + \varepsilon| \leq |b| + |\varepsilon| < n + \frac{1}{n} < m$.

  Noch zu zeigen: $|b + \varepsilon| > \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
  b ist abschätzbar, das heißt es gilt $\frac{1}{N} < |b|$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2 \cdot N$ gilt dann: $|b| > \frac{1}{N} > \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n}$. Also $\frac{2}{n} < |b|$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2 \cdot N$.
  Betrachten wir für $n > 2 \cdot N$ also $|b + \varepsilon| \geq |b| - |\varepsilon| > \frac{2}{n} - |\varepsilon| > \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.
  Es existiert also ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|b + \varepsilon| > \frac{1}{n}$.

  Insgesamt folt damit $\frac{1}{n} < |b + \varepsilon| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

  c) Zu zeigen: $b + c$ ist beschränkt, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b + c| < n$.
  Beweis: $|b + c| \leq |b| + |c| < n + n = 2n := m$. Damit existiert also ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $|b + c| < m$ gilt, womit die Behauptung gezeigt ist.

  d) Zu zeigen: $H + \varepsilon$ ist unbeschränkt, also $|H + \varepsilon| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  Beweis: H ist unbeschränkt, also $|H| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus folgt, dass auch $|H| > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist entscheidend, dass die erste Aussage für alle natürlichen Zahlen n gilt.
  Dann ist $|H + \varepsilon| \geq |H| - |\varepsilon| > n + 1 - |\varepsilon| \geq n + 1 - \frac{1}{n} > n$. Somit ist $H + \varepsilon$ unbeschränkt.

- Vorzeichenwechsel:

  a) Zu zeigen: $-\varepsilon$ ist infinitesimal, also $|-\varepsilon| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  Beweis: $|-\varepsilon| = |\varepsilon| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

- Produkt:

  a) Zu zeigen: $\varepsilon \cdot \delta$ und $\varepsilon \cdot b$ sind infinitesimal, also $|\varepsilon \cdot \delta| < \frac{1}{n}$ und $\varepsilon \cdot b < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  Beweis: $|\varepsilon \cdot \delta| = |\varepsilon| \cdot |\delta| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $|b| < m$. Falls $\varepsilon < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist ε auch

kleiner als $\frac{1}{m \cdot n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$|\varepsilon \cdot b| = |\varepsilon| \cdot |b| < \frac{1}{m \cdot n} \cdot m = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Kehrwert:

  a) Zu zeigen: $\frac{1}{\varepsilon}$ ist unbeschränkt, falls $\varepsilon \neq 0$, also $|\frac{1}{\varepsilon}| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  Beweis: Für den Fall, dass $\varepsilon = 0$ liegt ein unbestimmter Ausdruck vor, da durch 0 dividiert wird. Betrachte also im Folgenden den Fall, dass $\varepsilon \neq 0$. Aus $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$ folgt $n < |\frac{1}{\varepsilon}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich $|\frac{1}{\varepsilon}| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  b) Zu zeigen: $\frac{1}{b}$ ist abschätzbar, falls $b \neq 0$, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < |\frac{1}{b}| < n$.
  Beweis: Für den Fall, dass $b = 0$ ist, liegt ein unbestimmter Ausdruck vor, da durch 0 dividiert wird. Betrachte daher den Fall, dass $b \neq 0$.
  Nach Vorraussetzung ist b abschätzbar, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt $\frac{1}{n} \overset{(1)}{<} |b| \overset{(2)}{<} n$.
  Wir betrachten zunächst die Ungleichung (1): $\frac{1}{n} < |b| \Longleftrightarrow |\frac{1}{b}| < n$.
  Nun betrachten wir die Ungleichung (2): $|b| < n \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < |\frac{1}{b}|$.
  Insgesamt ergibt sich damit $\frac{1}{n} < |\frac{1}{b}| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

  c) Zu zeigen: $\frac{1}{H}$ ist infinitesimal, also $|\frac{1}{H}| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  Beweis: Da H unbeschränkt ist, folgt direkt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|H| > n \Longleftrightarrow |\frac{1}{H}| < \frac{1}{n}$.

- Quotient:

  a) Zu zeigen: $\frac{\varepsilon}{b}$, $\frac{\varepsilon}{H}$ und $\frac{b}{H}$ sind infinitesimal, also $|\frac{\varepsilon}{b}| < \frac{1}{n}$, $|\frac{\varepsilon}{H}| < \frac{1}{n}$ und $|\frac{b}{H}| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  Beweis: Da b abschätzbar ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass gilt $\frac{1}{m} < |b|$und somit $|\frac{1}{b}| < m$. Falls $\varepsilon < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\varepsilon < \frac{1}{m \cdot n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich zusammen $|\frac{\varepsilon}{b}| = |\varepsilon| \cdot |\frac{1}{b}| < \frac{1}{m \cdot n} \cdot m = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  Da H unbeschränkt ist, gilt $|H| > n$ und damit $|\frac{1}{H}| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ergibt sich $|\frac{\varepsilon}{H}| = |\varepsilon| \cdot |\frac{1}{H}| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  Weil H unbeschränkt ist, gilt $H > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da dies für alle natürlichen Zahlen gilt, ist auch $H > m \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\frac{1}{m \cdot n} > \frac{1}{H}$. Damit ist $|\frac{b}{H}| = |b| \cdot |\frac{1}{H}| < m \cdot \frac{1}{m \cdot n} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zu zeigen: $\frac{b}{c}$ ist abschätzbar, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < |\frac{b}{c}| < n$ gilt.
Beweis: b und c sind abschätzbar, also gilt $\frac{1}{n} < |b| < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{m} < |c| < m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, woraus jedoch nach dem Abschnitt über Kehrwerte auch $\frac{1}{m} < |\frac{1}{c}| < m$ gilt. Demnach gelten die beiden folgenden Ungleichungen: $|\frac{b}{c}| = |b| \cdot |\frac{1}{c}| < n \cdot m$ und $|\frac{b}{c}| = |b| \cdot |\frac{1}{c}| > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{n \cdot m}$. Insgesamt gilt also $\frac{1}{n \cdot m} < |\frac{b}{c}| < n \cdot m$. Da $n \cdot m \in \mathbb{N}$ ist, folgt damit die Behauptung.

c) Zu zeigen: $\frac{b}{\varepsilon}$ und $\frac{H}{\varepsilon}$ sind unbeschränkt für ε und $b \neq 0$, also $|\frac{b}{\varepsilon}| > n$ und $|\frac{H}{\varepsilon}| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Da b abschätzbar ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $|b| > \frac{1}{m}$ gilt. Weiterhin ist ε infinitesimal, sodass $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$ und ebenso $|\varepsilon| < \frac{1}{m \cdot n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ergibt sich $|\frac{1}{\varepsilon}| > m \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$|\frac{b}{\varepsilon}| = |b| \cdot |\frac{1}{\varepsilon}| > \frac{1}{m} \cdot (m \cdot n) = n.$
$|\frac{H}{\varepsilon}| = |H| \cdot |\frac{1}{\varepsilon}| > n \cdot n = n^2 > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Wurzel:

a) Zu zeigen: $\sqrt[m]{\varepsilon}$ ist infinitesimal für $\varepsilon > 0$.
Beweis:

  - Zuerst möchte ich die Existenz der Wurzel zeigen.
    Die Funktion $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist bei festem $n \in \mathbb{N}$ für alle positiven reellen Zahlen definiert, was durch die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\exists y \in \mathbb{R}$ mit $y^n = x$ ausgedrückt wird. Jede positive reelle Zahl besitzt also eine reelle n-te Wurzel für alle $n \in \mathbb{N}$. Benutzt man nun das Transferprinzip, so erweitert sich diese Aussage zu der Aussage, dass jede positive hyperreelle Zahl für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ eine n-te Wurzel besitzt. Dabei wurde insbesondere verwendet, dass ${}^*(\mathbb{R}^+) = ({}^*\mathbb{R})^+$ ist. Insbesondere ist obige Funktion also für alle positiven hyperreellen Zahlen bei festem $n \in {}^*\mathbb{N}$ definiert. Dies spiegelt sich durch die transferierte Aussage $\forall n \in {}^*\mathbb{N}$ und $\forall x \in {}^*\mathbb{R}^+$ $\exists y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $y^n = x$ wieder.

  - Ich möchte nun einen indirekten Beweis für obige Aussage erbringen.
    Annahme: $\sqrt[m]{\varepsilon}$ ist nicht infinitesimal.
    Dann muss $\sqrt[m]{\varepsilon}$ entweder abschätzbar oder unbeschränkt sein.
    Sei also $x := \sqrt[m]{\varepsilon}$ entweder abschätzbar oder unbeschränkt. Dann müsste x^m eine infinitesimale Zahl ε ergeben. Betrachten wir jedoch die Aussagen aus Lemma (2.1) über Produkte, so stellen wir fest,

dass $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{m-mal}$ etweder als Produkt von abschätzbaren Zahlen wieder eine abschätzbare Zahl liefert oder als Produkt von unbeschränkten Zahlen wieder eine unbeschränkte Zahl liefert. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Vorraussetzung, dass ε eine infinitesimale Zahl ist. Somit muss auch x infinitesimal sein um die Umkehrung $x^m = \varepsilon$ zu erfüllen. □

§3 Der Gebrauch der Begriffe "endlich" und "unendlich"

In diesem Abschnitt soll auf den Gebrauch der Begriffe "endlich" und "unendlich" eingegangen werden.

Häufig werden die Begriffe "endlich" und "unendlich" für "beschränkt" und "unbeschränkt" verwendet. Doch dies passt nicht gut im Zusammenhand mit hyperreellen Zahlen. Dies wird durch folgende Ausführung, in der ich die Bedeutung der Begriffe endlich, unendlich, beschränkt und unbeschränkt erklären möchte, deutlich:
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn alle ihre Elemente beschränkt sind, das heißt wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in M$ gilt $|x| \leq c$. Existiert kein $c \in \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft, so heißt die Menge unbeschränkt, das heißt wenn zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $x \in M$ existiert, sodass $c < |x|$ gilt. Aus Analysis 1 ist bereits folgendes bekannt: Eine Menge wird als endlich bezeichnet, wenn sie aus n Elementen mit $n \in \mathbb{N}$ besteht, was auch durch eine Bijektion mit der Menge $\{1, 2, ..., n\} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ dargestellt weden kann. Wenn es also kein $n \in \mathbb{N}$ gibt, das diese Eigenschaft erfüllt, ist die Menge unendlich.
Im Folgenden sollen einige Beispiele gegeben werden, die zeigen, dass es sich bei obigen Begriffen um grundlegend verschiedene Dinge handelt, welche nicht einfach synonym zueinander verwendet werden dürfen.

- Ist eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt, so ist sie auch unendlich, besitzt also unendlich viele Elemente.
  Denn: Sei $c_1 > 0$. Wähle ein $x_1 \in M$ mit $|x_1| > c_1$ und setze $c_2 = 2 \cdot |x_1|$. Zu diesem c_2 existiert ein $x_2 \in M$ mit $|x_2| > c_2$, da M unbeschränkt ist.
  Setzt man diesen Prozess nun iterativ fort, gibt es zu jedem c_k ein $x_k \in M$ mit $|x_k| > c_k = 2 \cdot |x_{k-1}|$, da M unbeschränkt ist.

Man sieht also, dass $|x_k| > |x_l|$, also insbesondere $x_k \neq x_l$ für $1 \leq l < k$ und dass diese Elemente damit paarweise verschieden sind. Es kann also eine Bijektion von der Teilmenge $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset M$ auf die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ konstruiert werden. Da diese Bijektion jedoch nicht ganz M umfassen muss, folgt $|M| \geq |\mathbb{N}|$, wonach M also unendlich viele Elemente besitzt und damit unendlich ist.

- Im Umkehrschluss folgt, dass jede endliche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.
  Beweis: Da die Menge nur endlich viele Elemente hat, gibt es ein Element $x_0 \in M$, welches betragsmäßig am größten ist. Dann ist die Menge durch eben dieses x_0 beschränkt, da $\forall x \in M$ gilt $|x| \leq |x_0|$.
- Die Umkehrung, dass jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ endlich ist, gilt jedoch nicht.
  Denn: Wir betrachten diesbezüglich ein Gegenbeispiel.
  Die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist offensichtlich durch $x_0 = 1$ beschränkt, doch sie ist auch unendlich, da sie unendlich viele Elemente besitzt.
- Ebenso gilt die Aussage, dass jede beschränkte Menge unendlich ist, nicht.
  Beweis: Als Gegenbeispiel nehmen wir die leere Menge. Diese ist beschränkt und endlich.

Somit kann bei einer beschränkten Menge nicht allgemeingültig gesagt werden, dass sie endlich oder unendlich ist.
Selbiges gilt für unendliche Mengen, denn

- die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist unendlich und beschränkt

und

- die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist unendlich und unbeschränkt.

Somit kann allein durch die Eigenschaft unendlich keine Aussage über die Beschränktheit oder Unbeschränktheit der Menge getroffen werden.

Anhand dieser Ausführungen ist also ersichtlich, dass die Begriffe endlich, unendlich, beschränkt und unbeschränkt nicht verwechselt werden dürfen. Es ist also falsch, wenn man beispielsweise endlich als Synonym für beschränkt verwendet. Endlichkeit sagt bei einer Menge etwas über die Anzahl ihrer Elemente aus und Beschränktheit etwas über die Größe ihrer Elemente.

Nach obiger Definition von endlichen und unendlichen Mengen tritt jedoch ein Konflikt auf, wenn man zu den hyperreellen Zahlen übergeht. Denn für eine unbeschränkte hypernatürliche Zahl $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ wäre die Menge $\{1, 2, ..., N\} = \{k \in {}^*\mathbb{N} : k \leq N\}$

aus mengentheoretischer Sicht mit obigen Definitionen unendlich. Doch auf der anderen Seite folgt durch das Transferprinzip, dass auch zu dieser Menge andere Mengen existieren, welche in Bijektion zu ihr stehen. Somit lassen sich Mengen mit $N \in ^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ Elementen mit Hilfe der hypernatürlichen Zahlen in gleicher Weise abzählen, wie man Mengen mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen mit Hilfe der natürlichen Zahlen abzählen kann. Aus dieser Sicht müsste also auch diese Menge als endlich angesehen werden, wodurch ein Konflikt mit der Bezeichnung endlich und unendlich entsteht. Mengen mit $N \in ^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ Elementen werden hyperendliche Mengen genannt und treten im Bereich der Methodik der hyperreellen Zahlen zu einem späteren Zeitpunkt erneut auf und sind dort von fundamentaler Bedeutung.

§ 4 Gegenseitige Lage von reellen und hyperreellen Zahlen

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Definitionen und Sätze eingeführt, welche die gegenseitige Lage von reellen und hyperreellen Zahlen beschreiben und mit deren Hilfe diese genauer untersucht werden kann. Dies ist im weiteren Verlauf von großer Bedeutung um Aussagen über die Anordnung der hyperreellen Zahlen treffen zu können.

(4.1) Definition (Halo (Monade))
Eine hyperreelle Zahl b befindet sich unendlich nahe an einer hyperreellen Zahl c, wenn ihre Differenz $b - c$ infinitesimal ist. Dies wird dargestellt durch $b \simeq c$. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf den hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ definiert und die Äquivalenzklassen von $\simeq$ bezeichnet man mit *halo*: $hal(b) = \{c \in ^*\mathbb{R} : b \simeq c\}$, also die Menge aller hyperreellen Zahlen, welche unendlich nahe an b liegen.
Dies bedeutet also: $b \simeq c :\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{I} : b - c = \varepsilon$
Im Deutschen wird für halo meist der Begriff *Monade* verwendet. ◇

Man kann das halo von b auch darstellen durch $hal(b) = \{b + \varepsilon : \varepsilon \in hal(0)\}$.
Denn: $hal(b)$ bezeichnet die Menge der hyperreellen Zahlen, welche unendlich nahe an b liegen. $hal(0)$ bezeichnet demnach die Menge aller infinitesimal kleinen Zahlen, sodass für jedes $c \in hal(b)$ gilt: $c = b + \varepsilon$ mit $\varepsilon \in hal(0)$, da jedes c einen infinitesimalen Abstand von b hat, welchen wir durch ε darstellen. Somit kann jedes $c \in hal(b)$ in obiger Form geschrieben werden und für $hal(b)$ ergibt sich die Darstellung $hal(b) = \{c \in ^*\mathbb{R} : b \simeq c\} = \{b + \varepsilon : \varepsilon \in hal(0)\}$.

Wir zeigen nun, dass durch $\simeq$ wirklich eine Äquivalenzrelation auf den hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ definiert wird:
Dazu untersuchen wir $\simeq$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

- Reflexiv: Zu zeigen: $a \simeq a$ für alle $a \in {}^*\mathbb{R}$, das heißt $a - a$ ist infinitesimal.
  Denn es ist $a - a = 0$, also infinitesimal und somit gilt $a \simeq a$.

- Symmetrisch: Zu zeigen: Aus $a \simeq b$ folgt $b \simeq a$ für alle $a, b \in {}^*\mathbb{R}$.
  Denn: Aus $a \simeq b$ folgt, dass $a - b$ infinitesimal ist und damit ist $(a - b) = -(b - a)$ infinitesimal, also auch $b - a$ und damit $b \simeq a$.

- Transitiv: Zu zeigen: Aus $a \simeq b$ und $b \simeq c$ folgt $a \simeq c$ für alle $a, b, c \in {}^*\mathbb{R}$, das heißt $a - c$ ist infinitesimal.
  Denn: $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c)$. Nach Voraussetzung sind $(a - b)$ und $(b - c)$ infinitesimal, da $a \simeq b$ und $b \simeq c$. Aus Lemma (2.1) folgt damit, dass die Summe zweier infinitesimaler Zahlen eine infinitesimale Zahl liefert, sodass $(a - c)$ infinitesimal ist und somit $a \simeq c$ gilt.

(4.2) Definition (Galaxy)
Zwei hyperreelle Zahlen b und c haben einen beschränkten Abstand voneinander, wenn ihre Differenz $b - c$ beschränkt ist. Dies wird dargestellt durch $b \sim c$. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation definiert und die Äquivalenzklassen von $\sim$ bezeichnet man mit *galaxy*: $gal(b) = \{c \in {}^*\mathbb{R} : b \sim c\}$, also die Menge aller hyperreellen Zahlen, welche einen beschränkten Abstand zu b haben. $\diamond$

Man kann die Galaxy von b auch darstellen durch $gal(b) = \{b + c : c \in gal(0)\}$.
Denn: $gal(b)$ bezeichnet die Menge der Zahlen, welche einen beschränkten Abstand zu b haben. $gal(0)$ bezeichnet demnach die Menge aller beschränkten hyperreellen Zahlen, also die Menge aller hyperreellen Zahlen, welche einen endlichen Abstand zu 0 haben. Sei nun $d \in gal(b)$, also habe d einen endlichen Abstand zu b. Dann gibt es ein $c \in gal(0)$, welches genau diesem Abstand entspricht. Damit kann jedes $d \in gal(b)$ geschrieben werden als $d = b + c$ und damit gilt:
$gal(b) = \{d \in {}^*\mathbb{R} : b \sim c\} = \{b + c : c \in gal(0)\}$.

Wir zeigen nun, dass durch $\sim$ wirklich eine Äquivalenzrelation definiert wird und untersuchen $\sim$ diesbezüglich auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

- Reflexiv: Zu zeigen: $a \sim a$ für alle $a \in {}^*\mathbb{R}$, das heißt $a - a$ ist beschränkt.
  Denn: Es ist $a - a = 0$ und dies ist beschränkt. Also gilt $a \sim a$.

- Symmetrisch: Zu zeigen: Aus $a \sim b$ folgt $b \sim a$ für alle $a, b \in {}^*\mathbb{R}$.
  Denn: Aus $a \sim b$ folgt, dass $a - b$ beschränkt ist, sodass auch $-(a - b) = b - a$ beschränkt ist, sodass $b \sim a$ folgt.

- Transitiv: Zu zeigen: Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$ für alle $a, b, c \in {}^*\mathbb{R}$.
  Denn: Betrachte $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c)$. Nach Voraussetzung folgt die Beschränktheit von $(a - b)$ aus $a \sim b$ und die Beschränktheit von $(b - c)$ aus $b \sim c$. Nach Lemma (2.1) ist die Summe zweier beschränkter Zahlen wieder eine beschränkte Zahl, sodass die Beschränktheit von $a - c$ und damit $a \sim c$ folgt.

(4.3) Bemerkung
Aus Definition (4.1) folgt, dass eine hyperreelle Zahl b genau dann infinitesimal ist, wenn $b \simeq 0$ ist und aus Definition (4.2) folgt, dass b genau dann beschränkt ist, wenn $b \sim 0$ ist.
Weiterhin wird die Menge aller infinitesimalen Zahlen dargestellt durch das halo von 0, also allen hyperreellen Zaheln, welche infinitesimal bei 0 liegen:
$hal(0) = \mathbb{I}$. Die Menge aller beschränkten Zahlen wird dargestellt durch die galaxy von 0: $gal(0) = \mathbb{L}$. ◇

(4.4) Satz (Standardteil-Satz)
Jede beschränkte hyperreelle Zahl b ist infinitesimal nahe an genau einer reellen Zahl. Diese reelle Zahl nennt man *Shadow* von b und sie wird mit $\mathrm{sh}(b)$ bezeichnet. In der deutschen Literatur findet man häufig die Bezeichnung *Standardteil von b*. ◇

Beweis
Sei $b \in {}^*\mathbb{R}$ eine beschränkte hyperreelle Zahl. Setze $A = \{r \in \mathbb{R} : r < b\}$. Da b beschränkt ist, existieren nach Definition (1.1) reelle Zahlen r und s mit $r < b < s$. Damit ist A nicht leer, da $r \in A$. A ist durch s nach oben beschränkt, da $b < s$.
$\mathbb{R}$ ist vollständig, das heißt jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt ein Supremum. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt somit, dass A eine kleinste obere Schranke $c \in \mathbb{R}$ besitzt.
Um zu zeigen, dass $b \simeq c$ gilt, also b unendlich nahe an der reellen Zahl c liegt, wähle ein beliebiges positives $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Da c eine kleinste obere Schranke von A ist, kann $c + \varepsilon \in A$ nicht gelten. Damit folgt also, dass $b \leq c + \varepsilon$ gilt. Ebenso gilt, dass $b \leq c - \varepsilon$ eine falsche Aussage ist, da dies implizieren würde, dass $c - \varepsilon$ eine obere Schranke von A ist, was jedoch im Widerspruch zur Aussage steht, dass c die kleinste obere Schranke ist. Somit folgt, dass $b \nleq c - \varepsilon$ ist. Insgesamt bedeutet dies $c - \varepsilon < b \leq c + \varepsilon$, also $|b - c| \leq \varepsilon$. Da dies für alle positiven reellen Zahlen ε gilt, liegt b unendlich nahe an c, sodass $b \simeq c$ gezeigt ist.
Zu zeigen bleibt noch die Eindeutigkeit von c, also dass b unendlich nahe an genau einer reellen Zahl c liegt. Wir nehmen dazu an, dass $b \simeq c'$ mit $c' \in \mathbb{R}$ gilt. Da aber bereits $b \simeq c$ gilt und $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt, dass $c \simeq c'$ gilt, also c und c' unendlich nahe aneinander liegen. Da jedoch sowohl c, als auch c' reell sind

und zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen nicht infinitesimal benachbart sein können, folgt bereits Gleichheit, sodass $c = c'$ und somit die Eindeutigkeit gezeigt ist. □

Im Folgenden sollen einige Rechenregeln mit dem Umgang von Standardteilen von hyperreellen Zahlen diskutiert werden.

(4.5) Lemma
Wenn b und c beschränkte hyperreelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}$, dann ist

1) $\operatorname{sh}(b \pm c) = \operatorname{sh}(b) \pm \operatorname{sh}(c)$;
2) $\operatorname{sh}(b \cdot c) = \operatorname{sh}(b) \cdot \operatorname{sh}(c)$;
3) $\operatorname{sh}(\frac{b}{c}) = \frac{\operatorname{sh}(b)}{\operatorname{sh}(c)}$ wenn $\operatorname{sh}(c) \neq 0$ (das heißt wenn c abschätzbar ist);
4) $\operatorname{sh}(b^n) = \operatorname{sh}(b)^n$;
5) $\operatorname{sh}(|b|) = |\operatorname{sh}(b)|$;
6) $\operatorname{sh}(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{\operatorname{sh}(b)}$ wenn $b \geq 0$;
7) wenn $b \leq c$, dann ist $\operatorname{sh}(b) \leq \operatorname{sh}(c)$. ◇

Beweis
1) Sei $\operatorname{sh}(b) = b + \varepsilon$ mit ε infinitesimal und $\operatorname{sh}(c) = c + \delta$ mit δ infinitesimal. Diese Wahlen sind so möglich, da der Standardteil von b beziehungsweise c diejenige reelle Zahl beschreibt, welche infinitesimal an b beziehungsweise c liegt, also $b + \varepsilon$ beziehungsweise $c + \delta$ mit ε, δ infinitesimal. Damit folgt durch Umformung
$b = \operatorname{sh}(b) - \varepsilon$ und $c = \operatorname{sh}(c) - \delta$.
Dann ist $\operatorname{sh}(b + c) = \operatorname{sh}((\operatorname{sh}(b) - \varepsilon) + (\operatorname{sh}(c) - \delta)) = \operatorname{sh}(\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c) - (\varepsilon + \delta))$.
Nach Lemma (2.1) ist $-(\varepsilon + \delta)$ infinitesimal.
Zuerst untersuchen wir $\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c))$. Da $\operatorname{sh}(b)$ und $\operatorname{sh}(c)$ beides reelle Zahlen sind, ist auch $\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c)$ eine reelle Zahl. Der Standardteil einer reellen Zahl ist jedoch die reelle Zahl selber, also $\operatorname{sh}(\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c)) = \operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c)$. Es ist also ersichtlich, dass $\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c) - (\varepsilon + \delta)$ eine Zahl ist, welche infinitesimal nahe an der reellen Zahl $\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c)$ liegt, sodass ihr Standardteil $\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c)$ beträgt.
Zusammen ergibt sich demnach:
$\operatorname{sh}(b + c) = \operatorname{sh}(\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c) - (\varepsilon + \delta)) = \operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(c)$.
Für $\operatorname{sh}(b - c)$ ergibt sich mit analoger Argumentation $\operatorname{sh}(b - c) = \operatorname{sh}(b) - \operatorname{sh}(c)$.

2) Wähle wie in 1):
$\mathrm{sh}(b) = b + \varepsilon \Longleftrightarrow b = \mathrm{sh}(b) - \varepsilon$ und $\mathrm{sh}(c) = c + \delta \Longleftrightarrow c = \mathrm{sh}(c) - \delta$.
Dann ist $\mathrm{sh}(b \cdot c) = \mathrm{sh}((\mathrm{sh}(b) - \varepsilon) \cdot (\mathrm{sh}(c) - \delta))$
$= \mathrm{sh}(\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c) - \delta \cdot \mathrm{sh}(b) - \varepsilon \cdot \mathrm{sh}(c) + \varepsilon \cdot \delta)$.
Da ε und δ infinitesimal sind, folgt mit Lemma (2.1), dass $\delta \cdot \mathrm{sh}(b)$, $\varepsilon \cdot \mathrm{sh}(c)$ und $\varepsilon \cdot \delta$ infinitesimal sind und damit auch ihre Summe $-\delta \cdot \mathrm{sh}(b) - \varepsilon \cdot \mathrm{sh}(c) + \varepsilon \cdot \delta$. Betrachten wir $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c))$, so stellen wir fest, dass $\mathrm{sh}(b)$ und $\mathrm{sh}(c)$ reelle Zahlen sind und damit auch ihr Produkt $\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c)$. Der Standardteil einer reellen Zahl ist die reelle Zahl selber, also $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c)) = \mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c)$. Somit ist $\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c) - \delta \cdot \mathrm{sh}(b) - \varepsilon \cdot \mathrm{sh}(c) + \varepsilon \cdot \delta$ eine Zahl, welche infinitesimal nahe an der reellen Zahl $\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c)$ liegt, sodass sich für ihren Standardteil ebenfalls $\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c)$ ergibt. Also insgesamt:
$\mathrm{sh}(b \cdot c) = \mathrm{sh}(\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c) - \delta \cdot \mathrm{sh}(b) - \varepsilon \cdot \mathrm{sh}(c) + \varepsilon \cdot \delta) = \mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(c)$.
Weiterhin fällt Folgendes auf: Soll der Standardteil einer Zahl, welche sich als Summe darstellen lässt, bestimmt werden, so können infinitesimale Summanden bei der Betrachtung des Standardteils vernachlässigt werden.

3) Erneut wählen wir $\mathrm{sh}(c) = c + \delta \Longleftrightarrow c = \mathrm{sh}(c) - \delta$.
Mit dieser Wahl ergibt sich $\mathrm{sh}(\frac{b}{c}) = \mathrm{sh}(b \cdot \frac{1}{c}) \overset{(2)}{=} \mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(\frac{1}{c}) = \mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(\frac{1}{\mathrm{sh}(c)-\delta})$.
Da δ eine infinitesimale Zahl ist, ist $\frac{1}{\mathrm{sh}(c)-\delta}$ eine Zahl, die unendlich nahe an $\frac{1}{\mathrm{sh}(c)}$ liegt. Da $\mathrm{sh}(c)$ und somit $\frac{1}{\mathrm{sh}(c)}$ reell sind, ergibt sich $\mathrm{sh}(\frac{1}{\mathrm{sh}(c)-\delta}) = \frac{1}{\mathrm{sh}(c)}$ und insgesamt $\mathrm{sh}(\frac{b}{c}) = \mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(\frac{1}{\mathrm{sh}(c)-\delta}) = \mathrm{sh}(b) \cdot \frac{1}{\mathrm{sh}(c)} = \frac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{sh}(c)}$.

4) Es gilt die Gleichung $\mathrm{sh}(b^n) = \mathrm{sh}(\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{n-mal}) \overset{(2)}{=} \underbrace{\mathrm{sh}(b) \cdot \mathrm{sh}(b) \cdot ... \cdot \mathrm{sh}(b)}_{n-mal} = \mathrm{sh}(b)^n$,
mit der die Behauptung gezeigt ist.

5) $\mathrm{sh}(|b|)$ kann wie folgt dargestellt werden:
(1): $\mathrm{sh}(b)$ für $b \geq 0$
(2): $\mathrm{sh}(-b)$ für $b < 0$

Betrachte (1): Da $b \geq 0$ ist, muss auch der Standardteil von b größer oder gleich 0 sein, da b infinitesimal nahe an seinem Standardteil liegt und ein Widerspruch vorläge, falls $b \geq 0$ und $\mathrm{sh}(b) < 0$ gelten würde, da $\mathrm{sh}(b)$ im Falle von $b \geq 0$ im kleinsten Fall 0 als reelle Zahl wäre, wenn b infinitesimal ist. Wenn $\mathrm{sh}(b) \geq 0$, dann folgt aber $\mathrm{sh}(|b|) = \mathrm{sh}(b) = |\,\mathrm{sh}(b)|$ für $b \geq 0$.

Betrachte (2): $\mathrm{sh}(-b) = \mathrm{sh}(-1 \cdot b) \overset{(2)}{=} \mathrm{sh}(-1) \cdot \mathrm{sh}(b) = -1 \cdot \mathrm{sh}(b)$. Da $b < 0$ ist, muss, nach selbiger Begründung wie oben, auch $\mathrm{sh}(b) < 0$ sein. Damit ist dann

$-1 \cdot \mathrm{sh}(b) > 0$, also $\mathrm{sh}(|b|) = -1 \cdot \mathrm{sh}(b) = |\,\mathrm{sh}(b)|$ für $b < 0$.
Insgesamt ergibt sich also $\mathrm{sh}(|b|) = |\,\mathrm{sh}(b)|$.

6) $\sqrt[n]{b}$ ist die eindeutige Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a^n = b$.
Dann gilt die Gleichung:
$\sqrt[n]{\mathrm{sh}(b)} = \mathrm{sh}(b)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{sh}(a^n)^{\frac{1}{n}} \overset{(4)}{=} (\mathrm{sh}(a)^n)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{sh}(a) = \mathrm{sh}(\sqrt[n]{b})$,
mit der die Behauptung folgt.

7) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{sh}(b) \le b + \frac{1}{n} \le c + \frac{1}{n} \le \mathrm{sh}(c) + \frac{2}{n}$. Da es sich bei $\mathrm{sh}(b)$ und $\mathrm{sh}(c)$ um reelle Zahlen handelt, folgt damit auch gleichzeitig $\mathrm{sh}(b) \le \mathrm{sh}(c)$. $\square$

(4.6) Lemma

a) Für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gilt $hal(r_1) \cap hal(r_2) = \emptyset$, falls $r_1 \neq r_2$.

b) Wenn $b \simeq x \le y \simeq c$ mit b und c reell, dann gilt $b \le c$.

c) Wenn $x \simeq y$ und b beschränkt ist, dann ist auch $b \cdot x \simeq b \cdot y$. $\diamond$

Beweis

a) Ich zeige, dass die halos zweier reeller Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 \neq r_2$ disjunkt sind. Sei $y \in hal(r_1) \cap hal(r_2)$, dann ist $y \in hal(r_1) \wedge y \in hal(r_2)$. Dies bedeutet aber, dass $y \in$*$\mathbb{R}$ und $y \simeq r_1$ $(*)$ und $y \simeq r_2$ $(**)$ gilt. Wir betrachten nun Satz (4.4), wonach jede hyperreelle Zahl infinitesimal nahe an genau einer reellen Zahl liegt. Nach $(*)$ gilt also $sh(y) = r_1$, da r_1 nach Voraussetzung reell ist und y infinitesimal nahe an r_1 liegt. Aber nach $(**)$ gilt auch $sh(y) = r_2$, da r_2 nach Voraussetzung reell ist und y infinitesimal nahe an r_2 liegt. Demnach läge y infinitesimal nahe an zwei reellen Zahlen, was jedoch ein Widerspruch zu Satz (4.4) ist, nachdem sie infinitesimal nahe an genau einer reellen Zahl liegt. Somit gibt es kein y mit $y \in hal(r_1) \cap hal(r_2)$, falls $r_1 \neq r_2$.

b) Wir betrachten zunächst den Fall, dass $x = y$, also $b \simeq x = y \simeq c$ gilt.
In diesem Fall folgt direkt, dass $hal(x) = hal(y)$ ist. Aus der Aussage, dass jede hyperreelle Zahl infinitesimal nahe an genau einer reellen Zahl liegt, folgt, dass in jedem halo auch nur genau eine reelle Zahl liegen kann, da sonst jedes Element dieses halos infinitesimal nahe an mehr als einer reellen Zahl liegen würde. Weiterhin folgt aus $b \simeq x$ und $y \simeq c$, dass $b \in hal(x)$ und $c \in hal(y)$.
Da $hal(x) = hal(y)$, ist $b \in hal(x)$ und $c \in hal(x)$. Weil aber b und c nach Voraussetzung reell sind, folgt, dass $b = c$ gelten muss, da beide im selben halo liegen.
Gilt also $b \simeq x = y \simeq c$, dann gilt auch $b = c$.
Nun betrachten wir den Fall, dass $x < y$, also $b \simeq x < y \simeq c$ gilt.

Da b und c reell sind, folgt also aus a), dass ihre halos disjunkt sind. Es ergeben sich also zwei Möglichkeiten. Für alle Elemente s aus dem halo von b gilt entweder $s > t$ für alle $t \in hal(y)$ oder $s < t$ für alle $t \in hal(y)$. Denn sobald es ein Element aus $hal(y)$ gibt, was diese Aussage nicht erfüllt, bedeutet dies einen Widerspruch dazu, dass die halos disjunkt sind.
Denn angenommen es existieren $s_1, s_2 \in hal(b)$, $t \in hal(y)$ mit $s_1 > t > s_2$. Dann wäre auch $t \in hal(b)$ im Widerspruch zur Disjunktheit der halos aus a).
Da aber nach Voraussetzung $x \in hal(b)$ und $y \in hal(c)$ mit $x < y$ ist, folgt, dass jedes Element aus $hal(x)$ kleiner als jedes Element aus $hal(y)$ ist, also ist demnach insbesondere $b < c$.

c) Um zu zeigen, dass $b \cdot x \simeq b \cdot y$ gilt, muss gezeigt werden, dass $b \cdot x - b \cdot y$ infinitesimal ist.
Es gilt $b \cdot x - b \cdot y = b \cdot (x - y)$. Nach Voraussetzung ist $(x - y)$ infinitesimal (wenn $b \neq 0$), da $x \simeq y$. Nach Lemma (2.1) ergibt die Multiplikation einer infinitesimalen Zahl mit einer beschränkten Zahl wieder eine infinitesimale Zahl, sodass auch $b \cdot x - b \cdot y = b \cdot (x - y)$ infinitesimal ist, sodass $b \cdot x \simeq b \cdot y$ gilt.
Wenn b unbeschränkt wäre, so läge eine Multiplikation einer infinitesimalen Zahl mit einer unbeschränkten Zahl vor. Diese Operation ist jedoch nach Lemma (2.1) unbestimmt, sodass in diesem Fall über die Richtigkeit der obigen Aussage keine Angabe gemacht werden kann. □

Im Folgenden möchte ich noch auf den Größenvergleich von hyperreellen Zahlen eingehen.
Man findet die hyperreellen Zahlen auch oft als Zahlensequenzen dargestellt, sodass *ℝ auch als die Menge aller reeller Zahlensequenzen aufgefasst werden kann. Hyperreelle Zahlen haben dann beispielweise die Form $A = (3, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, ...)$, $B = (3, 2 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{9}, 2 + \frac{1}{16}, ...)$, $C = (2, 2, 2, 2, ...)$. Die reellen Zahlen werden dargestellt durch konstante Zahlensequenzen. Demnach entspricht C der reellen Zahl 2. Die Zahlensequenzen A und B hingegen sind nicht konstant und stellen somit keine reellen Zahlen dar, sondern sind Elemente aus $^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$. Weiterhin erkennen wir, dass A und B sich im Laufe ihrer Sequenz immer näher an die reelle Zahl 2 annähern, sodass sie beide infinitesimal nahe an 2 liegen. Demnach liegen sie im halo von C, also $A, B \in hal(C)$. Man kann sich nun die Frage stellen, wie man bei zwei Zahlen aus dem selben halo entscheiden kann, welche von ihnen größer und welche kleiner ist. Da es sich bei der hier gewählten Darstellung der hyperreellen Zahlen um Zahlensequenzen handelt, liegt es nahe die einzelnen Glieder der Sequenzen miteinander zu vergleichen. Sind alle Glieder der einen Sequenz größer als die entsprechenden Glieder der zweiten Sequenz, so ist es klar, dass die erste

Zahlensequenz größer als die zweite ist. Doch wie sieht es aus, wenn es sowohl Glieder gibt, die größer sind, als auch Glieder, die kleiner sind? Um diese Frage zu beantworten, verteilt man die Sequenzglieder in drei Mengen. Die erste Menge umfasst die Glieder der ersten Sequenz, die größer als die Glieder der zweiten Sequenz sind, die zweite Menge die Glieder der ersten Sequenz, die kleiner als die der zweiten Sequenz sind und die dritte Menge die Glieder, bei denen Gleichheit vorliegt. Jede dieser Menge beinhaltet nun eine bestimmte Anzahl von Elementen. Diejenige Menge, welche die meisten Elemente hat, bestimmt, welche Menge größer ist. Beinhaltet also beispielsweise die erste Menge die meisten Elemente, so ist die erste Sequenz größer als die zweite. Seien also $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$ und $B = (b_0, b_1, b_2, b_3, ...)$ hyperreelle Zahlen. Dann bezeichnen wir $[A = B] = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$, $[A > B] = \{n \in \mathbb{N} : a_n > b_n\}$ und $[A < B] = \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\}$.

Hierzu betrachten wir nun einige Beispiele. Betrachten wir zuerst die beiden Zahlensequenzen A und B vom Anfang. Dann ist $[A = B] = \{0\}$, $[A < B] = \emptyset$ und $[A > B] = \mathbb{N} - \{0\}$. In diesem Fall ist offensichtlich, dass $[A > B]$ die Menge mit den meisten Elementen ist, sodass die Zahlensequen und damit die hyperreelle Zahl A größer ist als B.
Betrachten wir nun als zweites Beispiel die Zahlensequenzen
$A = (1, 2, 4, 8, 16, ...)$ und $B = (30, 30, 30, 30, 30, ...)$.
In diesem Fall ist:
$[A = B] = \emptyset$, $[A < B] = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $[A > B] = \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Da also $[A > B]$ die Menge mit den meisten Elementen ist, gilt $A > B$.

(4.7) Folgerung (Vergleich reeller Zahlen bzw. Real Comparisons)
Aus dem obigen Lemma ergibt sich ein Kriterium um die Größe zweier reeller Zahlen b und c zu vergleichen. Sei $b > c$. Da b und c reell sind und zwei reelle Zahlen nicht infinitesimal nahe beieinander liegen können, folgt dass ihre halos disjunkt sind. Wäre dies nicht der Fall, so lägen b und c infinitesimal beieinander. Demnach ist jedes Element im halo von b größer als jedes Element im halo von c. Um zu zeigen, dass $b \leq c$ gilt, reicht es demnach, wenn man zeigt, dass ein beliebiges Element aus dem halo von b kleiner oder gleich irgendeinem Element aus dem halo von c ist. Gilt also die Aussage $\exists x \in hal(b)$ mit $x \leq y$ für ein $y \in hal(c)$, so folgt $b \leq c$. Insbesondere gilt diese Aussage auch, wenn ein x existiert mit $b \simeq x \leq c$ oder $b \leq x \simeq c$. Denn sei $x \leq c$ und gelte $b \simeq x$, so liegt b im halo von x und ist somit ebenfalls kleiner oder gleich c. Selbige Argumentation gilt für $b \simeq x \leq c$. ◇

(4.8) Lemma
Seien b und c beschränkte hyperreelle Zahlen und gelte $b \simeq b'$ und $c \simeq c'$, dann gilt:

a) $b \pm c \simeq b' \pm c'$;

b) $b \cdot c \simeq b' \cdot c'$;

c) $\frac{b}{c} \simeq \frac{b'}{c'}$ falls $c \not\simeq 0$. ◇

Beweis
$b \simeq b'$ und $c \simeq c'$ ist gleichbedeutend damit, dass $b - b'$ und $c - c'$ infinitesimal sind.

a) Zu zeigen: $b \pm c \simeq b' \pm c'$, also $(b \pm c) - (b' \pm c')$ ist infinitesimal.
Betrachte zunächst "+": $(b + c) - (b' + c') = b - b' + c - c'$. Da $b - b'$ und $c - c'$ nach Voraussetzung jeweils infinitesimal sind, gilt dies auch für deren Summe, sodass $(b + c) - (b' + c')$ infinitesimal ist. Damit gilt also $b + c \simeq b' + c'$.
Betrachte nun "−": $(b - c) - (b' - c') = b - b' + c' - c$. Nach Voraussetzung ist $b - b'$ infinitesimal. Da außerdem $c \simeq c'$ gilt und $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus der Symmetrie, dass auch $c' \simeq c$ gilt und $c' - c$ damit infinitesimal ist. Damit ist auch $b - b' + c' - c$ als Summe infinitesimaler Zahlen infinitesimal, sodass $b - c \simeq b' - c'$ gilt.

b) Zu zeigen: $b \cdot c \simeq b' \cdot c'$, also $b \cdot c - b' \cdot c'$ ist infinitesimal.
Die Voraussetzung $b \simeq b'$ und damit $b - b'$ ist infinitesimal, kann auch wie folgt geschrieben werden: $b - b' = \varepsilon$ mit ε infinitesimal und damit $b = \varepsilon + b'$. Dann ist: $b \cdot c - b' \cdot c' = (b' + \varepsilon) \cdot c - b' \cdot c' = b' \cdot c + c \cdot \varepsilon - b' \cdot c' = b' \cdot (c - c') + c \cdot \varepsilon$. Nun ist $c - c'$ nach Voraussetzung infinitesimal und da b′ und c beschränkt sind, folgt mit Lemma (2.1), dass $b' \cdot (c - c')$ und $c \cdot \varepsilon$ infinitesimal sind, ebenso wie ihre Summe, sodass folgt, dass $b \cdot c - b' \cdot c'$ infinitesimal ist, was $b \cdot c \simeq b' \cdot c'$ zeigt.

c) Zu zeigen: $\frac{b}{c} \simeq \frac{b'}{c'}$ falls $c \not\simeq 0$, also $\frac{b}{c} - \frac{b'}{c'}$ ist infinitesimal falls $c \not\simeq 0$.
Für $c \not\simeq 0$ gilt: Sei erneut $b = b' + \varepsilon$, dann ist $\frac{b}{c} - \frac{b'}{c'} = \frac{b'+\varepsilon}{c} - \frac{b'}{c'} = \frac{b'}{c} + \frac{\varepsilon}{c} - \frac{b'}{c'} = \frac{b' \cdot c'}{c \cdot c'} + \frac{\varepsilon}{c} - \frac{b' \cdot c}{c \cdot c'} = \frac{b'}{c \cdot c'} \cdot (c' - c) + \frac{\varepsilon}{c}$. $(c' - c)$ ist nach Voraussetzung infinitesimal. Da b', c und c' beschränkt sind, ist auch $\frac{b'}{c \cdot c'}$ beschränkt und nach Lemma (2.1) sind dann $\frac{b'}{c \cdot c'} \cdot (c' - c)$ und $\frac{\varepsilon}{c}$ infinitesimal, sowie deren Summe $\frac{b'}{c \cdot c'} \cdot (c' - c) + \frac{\varepsilon}{c}$, sodass $\frac{b}{c} \simeq \frac{b'}{c'}$ folgt.
Wir betrachte nun noch den Fall, dass $c \simeq 0$ gilt. Dies bedeutet, dass $c - 0 = c$ infinitesimal ist. Da $c' \simeq c$, also $c' - c$ infinitesimal ist, muss auch c' infinitesimal sein und somit nach Lemma (2.1) auch $c \cdot c'$ und $b' \cdot (c' - c)$. Dann sind aber die Ausdrücke $\frac{b' \cdot (c' - c)}{c \cdot c'}$ und $\frac{\varepsilon}{c}$ nicht definiert als Quotient infinitesimaler Zahlen. Daher kann über die Richtigkeit der Aussage $\frac{b}{c} \simeq \frac{b'}{c'}$ in diesem Fall keine Aussage getroffen werden. □

(4.9) Lemma
Jede hyperreelle Zahl ist infinitesimal nahe bei einer hyperrationalen Zahl. ◇

Beweis
Wenn jede hyperreelle Zahl infinitesimal nahe an einer hyperrationalen Zahl liegt, bedeutet dies: $\forall x \in^*\mathbb{R}\ \exists q \in^*\mathbb{Q}$ mit $x \simeq q$, also $x - q$ ist infinitesimal. Wenn $x - q$ infinitesimal ist, bedeutet dies $|x - q| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist bekannt, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Es gilt also

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists q = q(x,n) \in \mathbb{Q})(|x-q| < \frac{1}{n}).$$

Diese Aussage lässt sich mit Hilfe des Transferprinzips auf die hyperreellen Zahlen übertragen, womit sich folgende Aussage ergibt:

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\forall N \in {}^*\mathbb{N})(\exists q = q(x,N) \in {}^*\mathbb{Q})(|x-q| < \frac{1}{N}).$$

Wenn wir nun ein unbeschränktes $N \in^*\mathbb{N}$ fixieren, dann gilt $\frac{1}{N} < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt also:

$$|x-q| < \frac{1}{N} < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $|x - q|$ infinitesimal und es ist $x \simeq q$, was bedeutet, dass x infinitesimal nahe an q liegt, womit die Behauptung, dass jede hyperreelle Zahl infinitesimal nahe bei einer hyperrationalen Zahl ist, gezeigt ist. □

§5 Vollständigkeit der reellen Zahlen

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe der hyperreellen Zahlen die Vollständigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nachgewiesen werden.

Im vierten Abschnitt wurde der Standardteil einer beschränkten hyperreellen Zahl behandelt und dessen Existenz bewiesen. Diese folgte aus der Dedekind Vollständigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, welche besagt, dass jede nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen ein Supremum besitzt beziehungsweise jede nichtleere nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen ein Infimum besitzt. Die Existenz des Standardteils reeller Zahlen stellt sich als alternative Formulierung des Begriffs der Vollständig heraus, was im Folgenden ausgeführt werden soll.

(5.1) Satz
Die Aussage "jede beschränkte hyperreelle Zahl ist unendlich nahe an einer reellen Zahl" impliziert die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. ◇

Um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu zeigen, möchte ich 2 verschiedene Beweise führen:

Beweis (1)
Den Beweis erbringen wir mit Hilfe von Cauchy-Folgen. Dazu möchte ich kurz einige Eigenschaften einer Cauchy-Folge wiederholen, welche für diesen Beweis von Bedeutung sind. Sei dazu $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge. Bei einer Cauchy-Folge nähern sich aufeinander folgende Folgenglieder immer näher an, je weiter man die Folge durchläuft, was bedeutet, dass sich hinreichend große Folgenglieder beliebig nahe annähern. Somit existiert insbesondere ein $k \in \mathbb{N}$, sodass alle Folgenglieder ab s_k einen Abstand < 1 von einander haben, also dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq k$ $|s_m - s_n| < 1$ gilt. Nach dem Transformationsprinzip bleibt diese Aussage auch für hyperreelle Folgen erhalten:

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ , sodass für alle } m, n \in {}^*\mathbb{N} \text{ mit } m, n \geq k \text{ gilt: } |{}^*s_m - {}^*s_n| < 1$$

Insbesondere gilt: Sei N ein unbeschränktes Element aus $^*\mathbb{N}$, dann gilt $k \leq N$, da ein Element aus $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ größer ist als jedes Element aus $\mathbb{N}$, also $|s_k - s_N| < 1$ und damit ist s_N beschränkt. Aus dem Standardteil-Satz folgt direkt, dass die hyperreelle Zahl s_N unendlich nahe an einer reellen Zahl $L \in \mathbb{R}$ liegt, also $s_N \simeq L$ gilt. Nun wollen wir zeigen, dass die ursprüngliche Folge s gegen diese reelle Zahl L konvergiert. Sei dazu ε eine beliebige positive reelle Zahl. Da s eine Cauchy-Folge ist, existiert abhängig von diesem ε ein $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass alle Folgenglieder ab dem Folgenglied s_{j_ε} einen Abstand voneinander haben, der kleiner als ε ist.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m, n \geq j_\varepsilon \text{ gilt } |s_m - s_n| < \varepsilon. \ (*)$$

Der nächste Schritt um die Konvergenz gegen L zu zeigen, ist zu zeigen, dass alle Folgenglieder nach s_{j_ε} einen Abstand kleiner als ε von L haben. Dies ist jedoch aus folgendem Grunde erfüllt: Alle Folgenglieder ab s_{j_ε} haben einen Abstand kleiner ε von s_N, da nach Voraussetzung $N > j_\varepsilon$ ist.
Weiterhin liegt s_N selber schon infinitesimal nahe an L.
Also: Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq j_\varepsilon$, dann sind $m, N \geq j_\varepsilon$ und mit dem Transfer der obigen Aussage $(*)$ folgt, dass s_m auch für $m \in {}^*\mathbb{N}$ einen Abstand kleiner ε von s_N hat: $|s_m - s_N| < \varepsilon$. Weil s_N infinitesimal nahe an L liegt, bedeutet dies, dass s_m einen Abstand von ε von L hat. Dies kann auch durch die folgende Ungleichung gezeigt werden:

$$|s_m - L| = |s_m - s_n + s_n - L| \leq |s_m - s_N| + |s_N - L| < \varepsilon + \delta \ ,$$

wobei δ infinitesimal ist und weil $s_m - L$ und ε reell sind, ist $|s_m - L| \leq \varepsilon$. Die zeigt bereits, dass auch alle weiteren Folgenglieder $s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, \ldots$ einen Abstand kleiner als ε von L haben, was bereits genügt um den Beweis zu erbringen, dass die Folge s gegen die reelle Zahl L konvergiert, da Konvergenz dann vorliegt, wenn zu jedem

$\varepsilon > 0$ ein Folgenglied existiert, ab dem der Abstand zum Grenzwert L kleiner als dieses ε ist. Dies haben wir jedoch gerade gezeigt.
Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass jede reelle Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, was eine Eigenschaft ist, welche äquivalent zur Dedekind Vollständigkeit ist. □

Beweis (2)
Anstatt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu zeigen, indem man zeigt, dass Cauchy-Folgen konvergieren, kann man auch einen direkten Beweis erbringen, dass jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit einer reellen oberen Schranke eine kleinste reelle obere Schranke hat.

Vorgehen:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei zuerst s_n das kleinste $k \in \mathbb{Z}$, sodass $\frac{k}{n}$ eine obere Schranke von A ist. Dann nehme man ein unbeschränktes $N \in^* \mathbb{N}_\infty$, also eine unbeschränkte positive natürliche Zahl und wähle $L \in \mathbb{R}$ unendlich nahe an $\frac{s_N}{N}$.
Den Beweis werden wir anhand folgender Schritte erbringen:

a) Wir zeigen, dass s_n existiert, wie es für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

b) Wir zeigen, dass $\frac{s_N}{N}$ beschränkt ist, sodass ein solches L nach Satz (4.6) existiert.

c) Wir weisen nach, dass L eine kleinste obere Schranke von A in $\mathbb{R}$ ist.

Beweis:

Bei diesem Beweis nehmen wir an, dass jede beschränkte hyperreelle Zahl $x \in^* \mathbb{R}$ einen eindeutigen Standardteil $\text{sh}(x)$ besitzt.
Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine feste, aber beliebige natürliche Zahl. Wir betrachten für dieses n nun die Folge $(s_n^k)^{k \in \mathbb{Z}}$, welche durch $s_n^k := \frac{k}{n}$ gegeben ist. Da die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ weder nach oben, noch nach unten beschränkt sind, ist auch $(s_n^k)^{k \in \mathbb{Z}}$ nicht nach oben und auch nicht nach unten beschränkt.
Demnach gibt es k^- und $k^+ \in \mathbb{Z}$, sodass s_n^j für alle $j \geq k^+$ eine obere Schranke von A ist und s_n^j für alle $j \leq k^-$ keine obere Schranke von A ist. Also:

$$\forall j \in \mathbb{Z}, j \geq k^+ : s_n^j \text{ ist obere Schranke von } A$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, j \leq k^- : s_n^j \text{ ist keine obere Schranke von } A.$$

Daher existiert $t_n := min\{k \in [k^-, k^+] \cap \mathbb{Z} \mid s_n^k \geq a \text{ für alle } a \in A\}$.

b) Aus Aufgabenteil a) folgt, dass es bei festem $n \in \mathbb{N}$ ein t_n gibt, sodass $\frac{t_n}{n}$ die kleinste obere Schranke von A ist. Dies bedeutet aber gleichsam, dass es ein Element aus A gibt, welches kleiner als $\frac{t_{n-1}}{n}$ ist. Das heißt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : ((\forall a \in A : s_n^{t_n} = \frac{t_n}{n} \geq a) \wedge (\exists b \in A : \frac{t_{n-1}}{n} < b)).$$

Wenden wir auf diese Aussage nun den Universaltransfer (Transfersatz) an, so erhalten wir:

$$\forall N \in {}^*\mathbb{N} : ((\forall a \in {}^*A : s_N^{t_N} = \frac{t_N}{N} \geq a) \wedge (\exists b \in {}^*A : \frac{t_{N-1}}{N} < b)).$$

Insbesondere existiert also bei einer unbeschränkten hypernatürlichen Zahl eine reelle Zahl, welche größer als $\frac{t_{N-1}}{N}$ ist und eine reelle Zahl, welche kleiner als $\frac{t_N}{N}$ ist. Dies bedeutet:

$$(\forall N \in {}^*\mathbb{N}_\infty)(\exists L, M \in \mathbb{R}) : (\frac{t_{N-1}}{N} < L \text{ und } \frac{t_N}{N} \geq M).$$

Hierbei kann man für L einfach eine obere Schranke von A nehmen und für M irgendein $a \in A \subseteq {}^*A$.
Damit folgt für alle $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$:

$$M = M(N) \leq \frac{t_N}{N} = \frac{t_N - 1 + 1}{N} = \frac{t_N - 1}{N} + \frac{1}{N} \leq L + \frac{1}{N} < L(N) + 1.$$

Damit ist $\frac{t_N}{N}$ also beschränkt und wir können den Standardteil-Satz anwenden, nach dem $\frac{t_N}{N}$ also infinitesimal nahe an genau einer reellen Zahl liegt. Dies bedeutet aber, dass $S(N) := \text{sh}(\frac{t_N}{N})$ existiert.

c) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.
Da $\frac{t_N}{N}$ infinitesimal nahe an $S(N)$ liegt, gilt $|S(N) - \frac{t_N}{N}| < \varepsilon$. Dies bedeutet:

$$S(N) - \varepsilon < \frac{t_N}{N}.$$

Nach Teil (b) gibt es ein $b \in {}^*A$ mit

$$S - \varepsilon < \frac{t_N - 1}{N} < b \leq L,$$

wobei L obere Schranke von A ist. Mit dem Existenztransfer folgt nun folgende Aussage:

$$\exists b \in A : S - \varepsilon < b \leq L.$$

Ebenfalls gilt nach Teil (b) für alle $a \in A$

$$a \leq \frac{t_N}{N} \simeq S(N) \underset{a,S(N)\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} a \leq S(N).$$

Damit ist gezeigt, dass $S = S(N)$ das Supremum von A ist und S unabhängig von der Wahl von $N \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ ist. □

§6 Die hypernatürlichen Zahlen *ℕ

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Menge $^*\mathbb{N}$ der hypernatürlichen Zahlen beschäftigen und eine detailiertere Beschreibung von diesen angeben.

Zuallererst halten wir fest, dass die Menge $^*\mathbb{N}$ der hypernatürlichen Zahlen abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist, was aus dem Transferprinzip folgt, da die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist, was folgendes bedeutet: Seien $x, y \in \mathbb{N}$, so sind auch $x + y \in \mathbb{N}$ und $x \cdot y \in \mathbb{N}$. Demnach gilt also letztlich auch: Seien $a, b \in {}^*\mathbb{N}$, so sind auch $a + b \in {}^*\mathbb{N}$ und $a \cdot b \in {}^*\mathbb{N}$.
Als nächstes untersuchen wir $^*\mathbb{N}$ auf beschränkte und unbeschränkte Elemente. Die einzigen beschränkten hypernatürlichen Zahlen sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Denn wenn eine hypernatürliche Zahl beschränkt ist, so gibt es eine natürliche Zahl, welche größer ist. Dies bedeutet also: ist $k \in {}^*\mathbb{N}$ beschränkt, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Betrachten wir die Aussage $\forall x \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n$ gilt $x = 1 \vee x = 2 \vee ... \vee x = n$, so folgt aus dessen Transfer, dass für obiges k gilt $k = 1 \vee k = 2 \vee ... \vee k = n$, also $k \in \{1, 2, ..., n\}$ und demnach $k \in \mathbb{N}$ gelten muss. Somit ist jede beschränkte hypernatürliche Zahl eine natürliche Zahl. Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar, dass alle Elemente aus $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ unbeschränkt sind, woraus wiederum folgt, dass die Elemente aus $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ größer sind als alle Elemente aus $\mathbb{N}$.
Für ein festes $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ setzen wir

$$\gamma(K) = \{K\} \cup \{K \pm n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Alle Elemente aus $\gamma(K)$ sind unbeschränkt, da K unbeschränkt und größer als jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, welches gleichsam beschränkt ist, sodass aus Lemma (2.1) folgt, dass $K \pm n$ ebenfalls unbeschränkt ist für alle $n \in \mathbb{N}$.
Das bedeutet also, dass unter der Ordnung $<$ auf die natürlichen Zahlen Kopien von $\mathbb{Z}$ folgen.

Desweiteren lässt sich $\gamma(K)$ auch darstellen als die Menge aller hypernatürlichen Zahlen, welche einen endlichen Abstand von K haben, was letztlich indirekt bereits durch $K \pm n : n \in \mathbb{N}$ zum Ausdruck kommt. Da die Menge aller hyperreellen Zahlen mit einem endlichen Abstand von K durch die Galaxy $gal(K)$ beschrieben wird, werden die hypernatürlichen Zahlen mit dieser Eigenschaft als Schnitt der Galaxy von K mit den hypernatürlichen Zahlen beschrieben, das heißt als Einschränkung der hypernatürlichen Zahlen auf die Galaxy von K. Demnach ist folgende Darstellung möglich:

$$\gamma(K) = \{H \in {}^*\mathbb{N} : K \sim H\} = gal(K) \cap {}^*\mathbb{N}.$$

Eine solche Menge der Form $\gamma(K)$ wird als *ℕ-*Galaxy* bezeichnet.
Wir wollen im Folgenden einen genaueren Blick auf solche *ℕ-*Galaxien* werfen und untesuchen wann eine *ℕ-*Galaxy* gleich oder kleiner einer anderen ist und welche Anordnung es bezüglich diesen gibt. Dazu halten wir zuerst einmal fest, dass auch die Menge ℕ der natürlichen Zahlen selber eine *ℕ-*Galaxy* bildet. Denn es gilt ja offensichtlich die Gleichung $\mathbb{N} = gal(1) \cap {}^*\mathbb{N}$, da alle natürlichen Zahlen einen endlichen Abstand zu 1 haben und der Schnitt der natürlichen Zahlen mit den hypernatürlichen Zahlen die natürlichen Zahlen selber sind. Demnach können wir $\gamma(K) = \mathbb{N}$ definieren, falls $K \in \mathbb{N}$ gilt. Über zwei *ℕ-*Galaxien* lässt sich allgemein Folgendes sagen:

$$\gamma(K) = \gamma(H) \text{ genau dann, wenn } K \sim H.$$

Denn wenn K und H einen endlichen Abstand voneinander haben, dann hat jedes Element mit einem endlichen Abstand zu K auch einen endlichen Abstand zu H und andersrum, sodass die Galaxien von k und H identisch sind. Mit $gal(K) = gal(H)$ folgt dann $\gamma(K) = gal(K) \cap {}^*\mathbb{N} = gal(H) \cap {}^*\mathbb{N} = \gamma(H)$. Ebenso gilt

$$\gamma(K) < \gamma(H) \text{ genau dann, wenn } K < H \text{ mit } K \nsim H$$

ist, das heißt wenn $|K - H|$ unbeschränkt ist. Denn wegen $K \nsim H$ kann keine Gleichheit gelten, sodass entweder $gal(K) < gal(H)$ oder $gal(K) > gal(H)$ gelten muss. Wenn $K < H$ und $K \nsim H$ gilt, dann sind weniger Zahlen in einem endlichen Abstand zu K als zu H, da *ℕ nicht nach oben beschränkt ist und somit mehr Zahlen einen endlichen Abstand zu H haben. Somit ist also $gal(K) < gal(H)$ und damit: $\gamma(K) = gal(K) \cap {}^*\mathbb{N} < gal(H) \cap {}^*\mathbb{N} = \gamma(H)$. Dadurch sind die *ℕ-*Galaxien* geordnet.
Aus dieser Anordnung folgt, dass es weder eine größte, noch eine kleinste unbeschränkte *ℕ-*Galaxy* gibt. Betrachten wir zuerst die erste Aussage. Wegen

$$\gamma(K) < \gamma(2K)$$

folgt bereits unmittelbar, dass es keine größte *ℕ-*Galaxy* geben kann. Nun kommen wir zur zweiten Aussage: Für zwei natürliche Zahlen n und $n+1$ gilt, dass eine von beiden gerade ist. Der Transfer dieser Aussage liefert, dass entweder K oder $K+1$ gerade ist. Da aber desweiteren K und $K+1$ einen endlichen Abstand voneinander haben, gilt $\gamma(K) = \gamma(K+1)$. Somit können wir annehmen, dass K gerade ist, woraus folgt, dass $\frac{K}{2} \in {}^*\mathbb{N}$. Damit ist dann

$$\gamma(\frac{K}{2}) < \gamma(K)$$

und $\frac{K}{2}$ ist unbeschränkt, wenn K unbeschränkt ist, was aus Lemma (2.1) folgt. Damit ist jedoch gezeigt, dass es keine kleinste unbeschränkte *ℕ-*Galaxy* gibt.
Abschließend wollen wir noch zeigen, dass es zwischen zwei beliebigen *ℕ-*Galaxien* eine dritte *ℕ-*Galaxy* gibt. Denn sei $\gamma(K) < \gamma(H)$ mit K und H beide gerade, dann folgt $\frac{K}{2}, \frac{H}{2} \in {}^*\mathbb{N}$ und damit auch $\frac{K+H}{2} \in {}^*\mathbb{N}$. Desweiteren folgt aus $\gamma(K) < \gamma(H)$, dass $K < H$ ist. Es ist $2 \cdot K = K + K \overset{K<H}{<} K + H \overset{K<H}{<} H + H = 2 \cdot H \Longleftrightarrow K < \frac{K+H}{2} < H$ und damit ist

$$\gamma(K) < \gamma(\frac{K+H}{2}) < \gamma(H).$$

Die Einschränkung, dass K und H gerade sind, konnten wir aus folgendem Grunde machen: Angenommen K ist ungerade, so ist $K+1$ gerade. Da aber, wie oben bereits erwähnt dann $\gamma(K) = \gamma(K+1)$ gilt, macht es für die Argumentation keinen Unterschied ob wir K oder $K+1$ wählen. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit K als gerade annehmen. Selbiges gilt für H. Damit ist also gezeigt, dass zwischen je zwei beliebigen *ℕ-*Galaxien* eine weitere, dritte *ℕ-*Galaxy* liegt.

Zusammenfassend: Die Ordnung < auf *ℕ besteht aus den natürlichen Zahlen ℕ, gefolgt von einer geordneten Menge von *ℕ-*Galaxien* (Kopien von ℤ), wobei es keine erste oder letzte *ℕ-*Galaxie* aus der Menge dieser Galaxien gibt.

§7 Literaturverzeichnis

Robert Goldblatt
Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis.
Graduate Texts in Mathematics, 188.
Springer-Verlag, New York 1998.