Stetige Funktionen

Vortrag zum Seminar zur Nonstandard Analysis, 19.12.2012

Ann-Kathrin Joswig

Inhaltsverzeichnis

§1 Einleitung

Im folgenden Vortrag wird aufbauend auf den vorangegangenen Vorträgen die Stetigkeit von Funktionen untersucht. Dabei werden Eigenschaften derartiger Funktionen aus dem Blickwinkel der hyperreellen Zahlen betrachtet und Charakterisierungen für Grenzwerte aus dem Reellen ins Hyperreelle übertragen. Diese neuen Prinzipien werden anhand verschiedener Beispiele besprochen. Zudem sollen der Zwischenwertsatz und der Satz vom Minimum und Maximum mit Nichtstandard-Methoden bewiesen werden.

§2 Stetige Funktionen

— *Cauchys Vorstellung von Stetigkeit* —

Eine Abbildung f ist stetig in einem Punkt c aus dem offenen Intervall (a, b), wenn der Funktionswert $f(x)$ nahe bei $f(c)$ liegt mit x nahe bei c. [1]

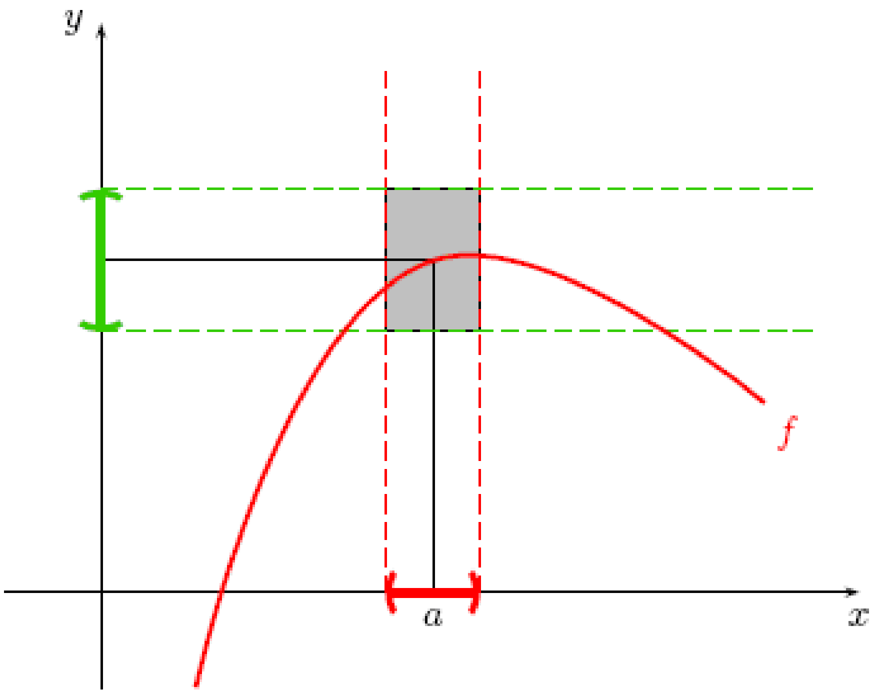

Abbildung 1: Stetige Funktion

1821 hat Cauchy dies wie folgt formuliert:
Eine Funktion f ist stetig im Punkt x aus dem Definitionsbereich D, falls eine infinitesimal kleine Änderung in x nur eine infinitesimal kleine Änderung in $f(x)$ bewirkt.

[1] Google Bilder: Stetige Funktionen, Urheber(Matroids Matheplanet User: Fragezeichen)

Hierraus folgt für reelle Funktionen die Definition.

(2.1) Definition
Gegeben sei eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *stetig in* x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ exisitert, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f heißt *stetig auf* E falls $E \subset D$ und f in jedem Punkt $x_0 \in$ E stetig ist. Man nennt f *stetig* wenn f stetig auf D ist. $\diamond$

(2.2) Beispiel
Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Für $x_0 \in [-1,1]$ und $\varepsilon > 0$ sei $\delta := \frac{\varepsilon}{2} > 0$, dann gilt für alle $x \in [-1,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$$

$$\leq |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|) \leq 2 \cdot |x - x_0| < 2\delta = \varepsilon$$

Daraus folgt, dass f stetig ist auf $[-1,1]$. $\diamond$

Aus dem Blickwinkel der hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ ergibt sich folgender Satz:

(2.3) Satz
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann ist f *stetig in einem reellen Punkt* c genau dann, wenn $f(x) \simeq f(c)$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \simeq c$, das heißt f ist stetig in c genau dann, wenn $f(\mathrm{hal}(c)) \subseteq \mathrm{hal}(f(c))$. $\diamond$

Zur Erinnerung: $\mathrm{hal}(b) := \{c \in {}^*\mathbb{R} : b \simeq c\}$

Beweis
$'' \Leftarrow ''$ Angenommen, aus $x \simeq c$ folgt $f(x) \simeq f(c)$. Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Mit einem positiven infinitesimalen d gilt dann für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|x - c| < d$, dass $x \simeq c$ ist. Daraus folgt nach unserer Voraussetzung: $f(x) \simeq f(c)$. Also gilt auch $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Nun ersetzen wir d mit δ und es folgt:

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*\mathbb{R}^+)(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Auf die reellen Zahlen übertragen ergibt sich mithilfe des Exisitenstransferprinzipes:

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R}^+)(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Die Funktion f ist demnach stetig.
$'' \Rightarrow ''$ Sei f stetig, d.h. für jedes positive reelle ε existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, sodass

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x-c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Mit dem Universaltransfer überträgt sich dies auf die hyperreellen Zahlen, sodass gilt:

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x-c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Wenn nun $x \simeq c$ in ${}^*\mathbb{R}$ erfüllt ist, folgt unmittelbar, dass $|x-c| < \delta$ sein muss. Mit der Stetigkeit von f ergibt sich $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Wegen der beliebigen Wählbarkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist folglich $f(x) \simeq f(c)$. Dies bedeutet bereits, dass
$f(\mathrm{hal}(c)) \subseteq {}^*(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ für alle ε ist. Also:

$$f(\mathrm{hal}(c)) \subseteq \mathrm{hal}(f(c)). \qquad \square$$

Der erste Abschnitt des vorangegangen Beweises liefert uns folgendes Korollar:

(2.4) Korollar
Folgende Aussagen sind äquivalent.
(1) f ist stetig in $c \in \mathbb{R}$
(2) $f(x) \simeq f(c)$ immer, wenn $x \simeq c$
(3) Es existiert ein positives $d \simeq 0$, sodass $f(x) \simeq f(c)$, falls $|x-c| < d$ $\diamond$

(2.5) Bemerkung
Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine reelle Abbildung und $A \subseteq D$. Für A spezifiziert man die Definition der Stetigkeit wie folgt:
f ist stetig auf A, falls für alle $c \in A$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon, c) \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass für alle $x \in A$ die Abschätzung $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ gilt, falls $|x-c| < \delta$ ist. Kurz:

$$(\forall c \in A)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in A)(|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon) \qquad \diamond$$

(2.6) Satz
Folgende Aussagen sind für $c \in A$ äquivalent.
(1) f ist stetig im Punkt c.
(2) $f(x) \simeq f(c)$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$.
(3) Es existiert ein positives $d \simeq 0$, sodass $f(x) \simeq f(c)$ für alle $x \in {}^*A$ mit $|x-c| < d$. $\diamond$

Beweis
"1 $\Rightarrow$ 2" Angenommen f ist stetig in $c \in A$, dann gilt: Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ für alle $x \in A$ mit $|x - c| < \delta$. Also:

$$(\forall x \in A)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Mithilfe des Transferprinzipes folgt in den hyperreellen Zahlen:

$$(\forall x \in {}^*A)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Sei nun $x \simeq c$ in ${}^*A$. Dann ist natürlich $|x - c| < \delta$ und daraus folgt $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Da ε beliebig ist, gilt $f(x) \simeq f(c)$.
"2 $\Rightarrow$ 3" Es ist $x \simeq c$ äquivalent dazu, dass $|x - c|$ infinitesimal klein ist. Nun existiert ein hyperreelles positives $d \simeq 0$, sodass für alle $x \in {}^*A$ mit $|x - c| < d$ bereits $x \simeq c$ gilt. Mit der Aussage aus 2 folgt: $f(x) \simeq f(c)$ für alle $x \in {}^*A$ mit $|x - c| < d$.
"3 $\Rightarrow$ 1" Es gelte $f(x) \simeq f(c)$ für alle $x \in {}^*A$ mit $|x - c| < d$. Daher gilt auch $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ für solche x und ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Ersetzen wir d durch δ erhalten wir:

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_{>0})(\forall x \in {}^*A)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Mit dem Existenztransfer gilt:

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in A)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Dies ist bereits die Definition der Stetigkeit von f im Punkt $c \in A$. □

— *Stetigkeit der Sinusfunktion* —

Unter Verwendung der vorangegangenen Sätze wird im Folgenden die Sinusfunktion auf Stetigkeit untersucht.
Aus Analysis I wissen wir, dass der Sinus bzw. der Cosinus stetig in Null sind. Daher existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt:

$$(\forall y \in \mathbb{R})(|y| < \delta \rightarrow |\sin(y) - 0| < \varepsilon)$$

bzw.

$$(\forall y \in \mathbb{R})(|y| < \delta \rightarrow |\cos(y) - 1| < \varepsilon)$$

Mit dem Transferprinzip folgt:

$$(\forall y \in {}^*\mathbb{R})(|y| < \delta \rightarrow |\sin(y) - 0| < \varepsilon)$$

bzw.

$$(\forall y \in {}^*\mathbb{R})(|y| < \delta \to |\cos(y) - 1| < \varepsilon)$$

Wenn nun $y \simeq 0$ ist, gilt natürlich auch $|y| < \delta$, daher ist $|\sin(y) - 0| < \varepsilon$ und $|\cos(y) - 1| < \varepsilon$. Da ε beliebig aus $\mathbb{R}_{>0}$ war, gilt $\sin(y) \simeq 0$ und $\cos(y) \simeq 1$.

Die Additionstheoreme gelten in $\mathbb{R}$. Mit dem Transferprinzip lassen sie sich auf ${}^*\mathbb{R}$ übertragen.

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $x \simeq c$, dann ist $x = c + \varepsilon$ für ein infinitesimal kleines ε. Es folgt:

$\quad \sin(x) - \sin(c) = \sin(c + \varepsilon) - \sin(c),$
$\overset{*}{=} \sin(c) \cdot \cos(\varepsilon) + \cos(c) \cdot \sin(\varepsilon) - \sin(c)$
$= \sin(c) \cdot (\cos(\varepsilon) - 1) + \cos(c) \cdot \sin(\varepsilon)$
= infinitesimal,
da eine beschränkte Zahl multiplziert mit einer infinitesimal kelinen Zahl wieder eine infinitesimal kleine Zahl ergibt.

* Additionstheorem: $\sin(c + \varepsilon) = \sin(c)\cos(\varepsilon) + \cos(c)\sin(\varepsilon)$ für alle $c, \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$.

§3 Grenzwerte

— Grenzwerte von Funktionen —

(3.1) Satz
Sei $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ und $c, L \in \mathbb{R}$ dann gilt:

1. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L,$ genau dann wenn $f(x) \simeq L$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x > c$.
2. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L,$ genau dann wenn $f(x) \simeq L$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x < c$.
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L,$ genau dann wenn $f(x) \simeq L$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$.
4. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty,$ genau dann wenn $f(x) \in {}^*\mathbb{R}^+_\infty$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$.
5. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty,$ genau dann wenn $f(x) \in {}^*\mathbb{R}^-_\infty$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L,$ genau dann wenn $f(x) \simeq L$ für alle unbegrenzten, positiven $x \in {}^*A$.

7. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, genau dann wenn $f(x) \simeq L$ für alle unbegrenzten, negativen $x \in {}^*A$.

$\diamond$

(3.2) Bemerkung
Für den Fall, dass x gegen ∞ bzw. $-\infty$ geht, muss gelten: Es existieren $a, b \in A$, sodass das offene Intervall (a, ∞) bzw. $(-\infty, b) \subseteq A$. Daraus folgt, dass ${}^*A^+_\infty$ bzw. ${}^*A^-_\infty$ nicht leer ist, da z.B. $[x_n] = [(a+n)_n]$ in ${}^*A^+_\infty$ bzw. $[y_n] = [(b-n)_n]$ in ${}^*A^-_\infty$ liegt. $\diamond$

Beweis
(1) $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ bedeutet: Es gibt ein $L \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass für alle $x \in A$ mit $|x - c| < \delta$ und $x > c$ gilt: $|f(x) - L| < \varepsilon$ (*)
$'' \Rightarrow ''$ Gelte nun also (*). Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt:

$$(\forall x \in A)(c < x < c + \delta \rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Der Universaltransfer liefert für die hyperreellen Zahlen:

$$(\forall x \in {}^*A)(c < x < c + \delta \rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon). \ (1)$$

Sei nun $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x > c$, dann gilt natürlich auch $|x - c| < \delta$ und x erfüllt somit (1). Aus (1) können wir folgern:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in {}^*A)((c < x \wedge x \simeq c) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dann gilt:

$$(\forall x \in {}^*A)((c < x \wedge x \simeq c) \rightarrow f(x) \simeq L \ (**)$$

$'' \Leftarrow ''$ Nun sei (**) erfüllt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist $\delta \in {}^*R_{>0}$ mit $\delta \simeq 0$, so impliziert $|x - c| < \delta$ bereits, dass $x \simeq c$ gilt. Es folgt aus $f(x) \simeq L$, dass $|f(x) - L| < \varepsilon$, da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Also impliziert (**) sofort:

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_{>0})(\forall x \in {}^*A)((c < x \wedge |x - c| < \delta) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Der Existenztransfer liefert uns:

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in A)((c < x \wedge |x - c| < \delta) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Insgesamt folgt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in A)(c < x < c + \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Dies ist genau (*).
(2) Analoges Verfahren zu (1) mit $x < c$.
(3) $\lim_{x\to c} f(x) = L$ bedeutet: Es gibt ein $L \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass für alle $x \in A$ mit $|x - c| < \delta$ und $x \neq c$ gilt:
$|f(x) - L| < \varepsilon$ (*)
$'' \Rightarrow ''$ Gelte nun also (*). Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt:

$$(\forall x \in A)(0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon).$$

Der Universaltransfer liefert für die hyperreellen Zahlen:

$$(\forall x \in {}^*A)(0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon). \ (3)$$

Sei nun $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$, dann gilt natürlich auch $|x - c| < \delta$ und x erfüllt somit (3). Aus (3) können wir folgern:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in {}^*A)((c \neq x \wedge x \simeq c) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dies impliziert:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \neq c \wedge x \simeq c) \rightarrow f(x) \simeq L \ (**)$$

$'' \Leftarrow ''$ Nun sei (**) erfüllt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Ist $\delta \in {}^*R_{>0}$ mit $\delta \simeq 0$, so impliziert $|x - c| < \delta$ bereits, dass $x \simeq c$ gilt. Es folgt aus $f(x) \simeq L$, dass $|f(x) - L| < \varepsilon$, da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Also impliziert (**) sofort:

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_{>0})(\forall x \in {}^*A)((x \neq c \wedge |x - c| < \delta) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Der Existenztransfer liefert uns:

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in A)((x \neq c \wedge |x - c| < \delta) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Insgesamt folgt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in A)(0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Dies ist genau (*).
(4) $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ bedeutet: Für alle $m \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta = \delta(m) \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $x \in A$ mit $|x - c| < \delta$ und $x \neq c$ gilt: $f(x) > m$. (*)
$'' \Rightarrow ''$ Gelte nun also (*). Sei $m \in \mathbb{R}$, dann gibt es ein $\delta = \delta(m) \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt:

$$(\forall x \in A)(0 < |x - c| < \delta \rightarrow f(x) > m).$$

Mit dem Universaltransfer erhalten wir:

$$(\forall x \in {}^*A)(0 < |x - c| < \delta \to f(x) > m).(4)$$

Sei nun $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$, dann gilt natürlich auch $|x - c| < \delta$ und x erfüllt somit (4). Aus (4) können wir folgern:

$$(\forall m \in \mathbb{R})(\forall x \in {}^*A)((x \neq c \wedge x \simeq c) \to f(x) > m).$$

Es folgt:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \neq c \wedge x \simeq c) \to f(x) \in {}^*\mathbb{R}^+_\infty).(**)$$

$'' \Leftarrow ''$ Nun sei (**) erfüllt. Sei $m \in \mathbb{R}$. Ist $\delta \in {}^*R_{>0}$ mit $\delta \simeq 0$, so impliziert $|x - c| < \delta$ bereits, dass $x \simeq c$ gilt. Ebenso: $f(x) \in {}^*\mathbb{R}^+_\infty \Rightarrow f(x) > m$ für $m \in \mathbb{R}$. Also impliziert (**) sofort:

$$(\exists \delta \in {}^*R_{>0})(\forall x \in {}^*A)((x \neq c \wedge |x - c| < \delta) \to f(x) > m).$$

Der Existenztransfer liefert:

$$(\exists \delta \in R_{>0})(\forall x \in A)((x \neq c \wedge |x - c| < \delta) \to f(x) > m).$$

Dann gilt also:

$$(\forall m \in \mathbb{R})((\exists \delta \in R_{>0})(\forall x \in A)((0 < |x - c| < \delta) \to f(x) > m).$$

Das ist genau Aussage (*)
(5) Analoges Verfahren zu (4) mit $f(x) < m$.
(6) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ bedeutet: Es gibt ein $L \in \mathbb{R}$, sodass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in A$ mit $x > x_0$ gilt: $|f(x) - L| < \varepsilon$. (*)
$'' \Rightarrow ''$ Gelte nun also (*). Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gibt es ein $x_0 = x_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$(\forall x \in A)(x > x_0 \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Der Universaltransfer liefert:

$$(\forall x \in {}^*A)(x > x_0 \to |f(x) - L| < \varepsilon).(6)$$

Sei nun $x \in {}^*A$ unbeschränkt und positiv, dann gilt natürlich auch $x > x_0$ und x erfüllt somit auch (6). Aus (6) können wir bereits folgern:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in {}^*A)((x \in {}^*A^+_\infty) \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Dann gilt:
$$(\forall x \in {}^*A)((x \in {}^*A^+_\infty) \to f(x) \simeq L).(**)$$

$'' \Leftarrow ''$ Nun sei (**) erfüllt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Aus $f(x) \simeq L$ folgt: $|f(x) - L| < \varepsilon$, da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir benutzen, dass $x \in {}^*A^+_\infty$ impliziert: Es existiert ein $x_0 \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x > x_0$, sodass $|f(x) - L| < \varepsilon$ für alle $x > x_0$.
(**) impliziert direkt:

$$(\exists x_0 \in {}^*\mathbb{R})(\forall x \in {}^*A)(x > x_0 \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Mit dem Existenztransfer erhalten wir:

$$(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x > x_0 \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Insgesamt gilt:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x > x_0 \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Das ist genau Aussage (*)
(7) Analoges Verfahren zu (6) mit unbeschränktem, negativem x. □

— *Aufgaben zur Grenzwertbestimmung* —

• $\lim_{x\to c} f(x) = L$, genau dann wenn $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ und $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$.

Beweis
$\lim_{x\to c} f(x) = L$ ist äquivalent zu: $f(x) \simeq L$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$. Dies wurde bereits im Satz (3.1) bewiesen.
Es gilt:
$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \wedge x \neq c) \to f(x) \simeq L).$$

Dies ist äquivalent zu:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \wedge (x < c \vee x > c)) \to f(x) \simeq L).$$

Seien A, B, C, D Aussagen dann gilt mit folgender Tatsache aus der Aussagenlogik: $((A \wedge B) \to D) \wedge ((A \wedge C) \to D) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to D)$ und $(\forall x \in Q)(R(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow (\forall x \in Q : R(x)) \wedge (\forall x \in Q : S(x))$. Aus diesem Grund gilt die oben genannte Aussage genau dann wenn:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \wedge x < c) \to f(x) \simeq L) \wedge (\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \wedge x > c) \to f(x) \simeq L).$$

Nach Satz (1.7) ist dies äquivalent zu: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ und $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. □

•Wenn $\lim_{x\to c} f(x)$, und $\lim_{x\to c} g(x)$ existieren, dann

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x),$$
$$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x),$$
$$\lim_{x\to c}[f(x)/g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) / \lim_{x\to c} g(x),$$
$$\text{wenn } \lim_{x\to c} g(x) \neq 0.$$

Beweis
(1) Wir wissen: Es existieren $L, M \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) \simeq L$ und $g(x) \simeq M$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$ ist. Weil $f(x)$, $g(x)$, L und M limitiert sind, da sie aus $\mathbb{R}$ kommen, gilt:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \wedge x \neq c) \to f(x)+g(x) \simeq L+M).$$

Mit Satz (3.1) bedeutet dies:

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = L+M = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x).$$

(2) Wir wissen: Es existieren $L, M \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) \simeq L$ und $g(x) \simeq M$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$ ist. Weil $f(x)$, $g(x)$, L und M limitiert sind, da sie aus $\mathbb{R}$ kommen, gilt:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \wedge x \neq c) \to f(x)\cdot g(x) \simeq L\cdot M).$$

Mit Satz (3.1) bedeutet dies:

$$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$$

(3) Wir wissen: Es existiert ein $L \in \mathbb{R}$ und ein $M \in \mathbb{R}^*$, sodass $f(x) \simeq L$ und $g(x) \simeq M$ für alle $x \in {}^*A$ mit $x \simeq c$ und $x \neq c$ ist. Die Division durch $g(x)$ ist für derartige $x \in {}^*A$ erlaubt, da $g(x) \neq 0$. Dies liegt daran, dass $M \neq 0$ und $g(x) \simeq M$ ist. Weil $f(x)$, $g(x)$, L und M limitiert sind, da sie aus $\mathbb{R}$ kommen, gilt:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \wedge x \neq c) \to \frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{L}{M}).$$

Mit Satz (3.1) bedeutet dies:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}.$$

□

• f ist stetig in c, genau dann wenn $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Beweis
$'' \Rightarrow ''$ Sei f stetig in c, dann ist nach Satz (2.3) $f(x) \simeq f(c)$ für alle $x \simeq c$. Insbesondere gilt:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \land x \neq c) \to f(x) \simeq f(c)).$$

Mit Satz (3.1) gilt dann: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
$'' \Leftarrow ''$ Sei $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, dann gilt:

$$(\forall x \in {}^*A)((x \simeq c \land x \neq c) \to f(x) \simeq f(c)).$$

Da $f(x) = f(c)$ für $x = c$ folgt:

$$(\forall x \in {}^*A)(x \simeq c \to f(x) \simeq f(c)).$$

Daher ist f nach Satz (2.3) stetig in c. □

§4 Anwendungen

— Beispiele zur Stetigkeit —

(1) Wir betrachten die Funktion $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^*$ und $y \simeq x$, dann gilt mit der Stetigkeit der Sinusfunktion und nach Aufgabe (5.7.1):

$$\frac{1}{x} \simeq \frac{1}{y} \Rightarrow f_1(x) = \sin(\frac{1}{x}) \simeq \sin(\frac{1}{y}) = f_1(y).$$

Also ist f_1 stetig in x.
Sei nun $x_0 = 0$. Definiere $w := [(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \pi, ...)] = [(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi)]$. Dann ist $x_0 \simeq \frac{1}{w}$, aber für $\varepsilon := \frac{1}{w}$ gilt $\varepsilon \neq 0$ und $f_1(0) = 0$,
$f_1(\varepsilon) = \sin(w) = [(\sin(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi))_k] = 1$. Da $1 \not\simeq 0$ ist f_1 unstetig in x_0.

(2) Wir betrachten die Funktion $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$$f_2(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^*$ und $y \simeq x$, dann gilt erneut nach Aufgabe (5.7), da der Sinus limitiert und stetig ist:

$$\frac{1}{x} \simeq \frac{1}{y} \Rightarrow f_2(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \simeq y \cdot \sin(\frac{1}{y}) = f_2(y),$$

denn $x, y, \sin(\frac{1}{x})$ und $\sin(\frac{1}{y})$ sind limitiert. Also ist f_2 stetig in x.
Sei nun $x_0 = 0$ und $y \simeq x_0$ mit $y \neq x_0$, da der Sinus limitiert ist und mit den Aussagen aus (5.2) [2] ergibt sich:

$$f_2(y) = y \cdot \sin(\frac{1}{y}) \simeq 0.$$

Daher ist f_2 stetig in x_0. Also ist f_2 stetig auf $\mathbb{R}$.

(3) Wir betrachten die Funktion $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational ist} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist} \end{cases}$$

Mit dem Transferprinzip gilt:

$$^*f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ hyperrational ist} \\ 0, & \text{falls } x \text{ hyperirrational ist} \end{cases}$$

Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$(\forall q \in \mathbb{Q})(\exists r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})(|r - q| < \varepsilon)$$

[2] Goldblatt, Robert (1998): Lecture on the hyperreals. An Introduction to nonstandard, Kapitel 5 Thema 5.2, Hyperreals Great and Small, Seite 50

In jeder Umgebung einer rationalen Zahl liegt eine irrationale Zahl. Mit dem Transferprinzip gilt:

$$(\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_{>0})(\forall q \in {}^*\mathbb{Q})(\exists r \in {}^*\mathbb{R}\backslash{}^*\mathbb{Q})(|r-q| < \varepsilon)$$

Da ε beliebig, existiert für jedes $q \in {}^*\mathbb{Q}$ ein $r \in {}^*\mathbb{R}\backslash{}^*\mathbb{Q}$, sodass $r \in \mathrm{hal}(q)$ ist. Daher folgt: ${}^*f_3(\mathrm{hal}(q)) \nsubseteq \mathrm{hal}({}^*f_3(q))$. Nach Satz (2.3) ist f_3 nicht stetig auf $\mathbb{Q}$.
Ebenso gilt für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$(\forall r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})(\exists q \in \mathbb{Q})(|r-q| < \varepsilon), \text{ da } \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \text{ dicht liegt.}$$

Es folgt ähnlich: f_3 ist nicht stetig auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

— *Zwischenwertsatz* —

(4.1) Satz
Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig mit $a < b$ und das geschlossene Intervall $[a,b] \subset D$, dann gilt für alle d mit $f(a) < d < f(b)$ bzw. $f(b) < d < f(a)$, es existiert ein c aus dem offenen Intervall (a,b), sodass $f(c) = d$ ist. ◇

Beweis
Idee zum Beweis: Wir zerlegen das geschlossene Intervall $[a,b]$ in infinitesimal kleine Teilintervalle. Gesucht wird das Intervall, dessen Anfangs- und Endpunkt eingesetzt in die Abbildung f, d umschließen. Dann ist c bestimmt, denn wir haben es auf ein infinitesimal kleines Intervall eingschränkt. OBdA sei $f(a) < f(b)$. Wir betrachten zuerst für ein $n \in \mathbb{N}$ die Unterteilung in n Teilintervalle von $[a,b]$. Diese haben die Länge $\frac{b-a}{n}$ und die Randpunkte $p_k = a + \frac{k\cdot(b-a)}{n}$ für $0 \leq k \leq n$.
Die Menge $M := \{p_k : f(p_k) < d\}$ ist endlich und nicht leer, da $p_0 = a \in M$, aber $p_n = b \notin M$ ist. Das heißt es existiert ein Maximum aus dieser Menge. Setze nun $s_n := \max\{p_k : f(p_k) < d\}$. Da s_n das Maximum der Menge der p_k mit $f(p_k) < d$ ist, folgt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a \leq s_n < b) \wedge (f(s_n) < d \leq f(s_n + (b-a)/n)).$$

Mit dem Transferprinzip gilt:

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(a \leq s_n < b) \wedge (f(s_n) < d \leq f(s_n + (b-a)/n)).$$

Mit einem unbeschränkten hypernatürlichen N erhält man infinitisimal kleine Teilintervalle, aus diesem Grund sind s_N und $s_N + (b-a)/N$ beide infinitisimal nahe bei $c = \mathrm{sh}(s_N)$, wobei $s_N = a + K \cdot \frac{b-a}{N}$, mit $K \in {}^*\mathbb{N}$ ist. s_N hat diese Form, weil für alle $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in M$ ist, daraus folgt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}_0)(s(n) = a + k \cdot \frac{b-a}{n})$$

Mit dem Transferprinzip gilt:

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(\exists k \in {}^*\mathbb{N}_0)(s(n) = a + k \cdot \frac{b-a}{n})$$

Da nun aber f stetig in $c \in \mathbb{R}$ ist, gilt nach Satz (2.3), dass $f(s_N)$ und $f(s_N + (b - a)/N)$ infinitisimal nahe bei $f(c)$ sind. Wegen

$$f(c) \simeq f(s_N) < d \leq f(s_N + (b-a)/N) \simeq f(c)$$

ist $d \simeq f(c)$, da $\frac{b-a}{N}$ infinitisimal klein ist. $f(c)$ und d sind beide reell, daher muss schon $f(c) = d$ gelten. □

— Satz vom Minimum und Maximum —

(4.2) Satz
Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig mit $a < b$ und das geschlossene Intervall $[a, b] \subset D$. Dann nimmt f auf $[a, b]$ ein absolutes Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $c, d \in [a, b]$, sodass $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ für alle $x \in [a, b]$ ◇

Beweis
Beweisidee: Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in infinitisimal kleine Teilintervalle, um den Partitionspunkt p, in welchem f den größten bzw. kleinsten Funktionswert annimmt, zu bestimmen. Dann ist $d = \mathrm{sh}(p)$ bzw. $c = \mathrm{sh}(p)$. Das Intervall wird zunächst in $\frac{1}{n}$ lange Teilintervalle aufgespalten. Die Randpunkte sind $p_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ für $0 \leq k \leq n$. Die Menge $M := \{f(x) : x = p_k, 0 \leq k \leq n\}$ ist nicht leer, da $f(a) \in M$ ist und hat maximal $n + 1$ Elemente. M besitzt daher ein Maximum. Sei s_n aus $[a, b]$ eines der p_k, in dem f den größten Funktionsswert annimmt, also $f(s_n) = \max(M)$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}_0)(a \leq s_n \leq b \wedge (k \leq n \to f(a + k \cdot \frac{b-a}{n}) \leq f(s_n))).$$

Mit dem Transferprinzip folgt:

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(\forall k \in {}^*\mathbb{N}_0)(a \leq s_n \leq b \wedge (k \leq n \to f(a + k \cdot \frac{b-a}{n}) \leq f(s_n))).$$

Wir nehmen uns ein hypernatürliches, unbeschränktes N und setzen
$d = \mathrm{sh}(s_N) \in \mathbb{R}$. Wegen der Stetigkeit von f gilt folgendes:

$$f(s_N) \simeq f(d)$$

Die Partition

$$P = \{a + k \cdot \frac{b-a}{N} : k \in {}^*\mathbb{N},\ 0 \leq k \leq N\},$$

hat die Eigenschaft, dass sie eine infinitisimal kleine Aproximation zu jeder reellen Zahl zwischen a und b ist. Denn für $x \in \mathbb{R}$ aus dem Intervall $[a, b]$ existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k < n$, sodass gilt:

$$a + k \cdot \frac{b-a}{n} \leq x \leq a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Daher existiert eine hypernatürliche Zahl $K < N$, sodass x in

$$[a + K \cdot \frac{b-a}{N},\ a + (K+1) \cdot \frac{b-a}{N}] := \{x \in {}^*\mathbb{R} | a + K... \leq x \leq a + (K+1)...\}$$

mit infinitesimaler Länge liegt. Da $\frac{b-a}{N}$ infinitesimal ist, folgt also $x \simeq a + K \cdot \frac{b-a}{N} \in P$. Wegen der Stetigkeit von f gilt auch:

$$f(x) \simeq f(a + K \cdot \frac{b-a}{N}).$$

Für jedes Element q aus P ist jedoch $f(q) \leq f(s_N)$, da

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall K \in \{1, ..., n\}) \rightarrow (f(p_K) \leq f(s_n))$$

mit dem Transferprinzip folgt

$$(\forall N \in {}^*\mathbb{N})(\forall K \in \{1, ...N\}) \rightarrow (f(p_K) \leq f(s_N)).$$

Insgesamt ergibt sich:

$$f(x) \simeq f(a + K \cdot \frac{b-a}{N}) \leq f(s_N) \simeq f(d).$$

Daraus folgt $f(x) \leq f(d)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt: f besitzt ein absolutes Maximum in d. Analog gilt dies also auch für das Minimum. □

§5 Literaturverzeichnis

• Goldblatt, Robert (1998): Lecture on the hyperreals. An Introduction to nonstandard analysis, Graduate Texts in Mathematics, 188. New York: Springer-Verlag.
• Krieg, Aloys (2007): Analysis I. Aachen: RWTH Aachen.