Die Dedekind'sche η - Funktion

Ausarbeitung zum Vortrag vom 05.10.2012

Jan Umlauft, 283137

In dieser Arbeit wird die Dedekind'sche η - Funktion eingeführt und ihr Transformationsverhalten unter Modulsubstitutionen beschrieben. Zu diesem Zweck werden wir uns ebenso mit der bedingt konvergenten Eisensteinreihe G_2 beschäftigen. Als interessante Andwendung wird eine Verbindung zwischen der η-Funktion und der normierten Diskriminante Δ^* hergeleitet.

§1 Die bedingt konvergente Eisensteinreihe

Die Konvergenz der Eisensteinreihen G_k wurden bisher nur für $k \geq 3$ bewiesen. Wir wollen nun den Fall $k = 2$ betrachten:

$$G_2(\tau) := \sum_{n \neq 0} n^{-2} + \sum_{m \neq 0} \big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \big), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

(1.1) Proposition
Die Funktion $G_2 : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ ist holomorph und für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt:

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3}\Big(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau}\Big).$$

Dabei sei

$$\sigma_1(m) := \sum_{d \in \mathbb{N}, d | m} d.$$

$\diamond$

Beweis
Wir verwenden im Beweis die Aussage [2, S.247]X(4.2) . Demnach gilt:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r \tau}, \quad \forall \tau \in \mathbb{H}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Verwendet man dies erhält man

$$\begin{aligned} G_2(\tau) &= 2\zeta(2) + 2 \sum_{m \geq 1} \big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \big) \\ &= 2\zeta(2) + 2\frac{(-2\pi i)^2}{1!} \sum_{m \geq 1} \sum_{r \geq 1} r^{2-1} e^{2\pi i r m \tau} \\ &= 2\zeta(2) - 8\pi^2 \sum_{m \geq 1} \sum_{r \geq 1} r e^{2\pi i r m \tau}. \end{aligned}$$

Wir begründen nun, dass die letzte Doppelsumme absolut konvergiert. Offensichtlich konvergiert die innere Summe absolut, denn

$$\sum_{r\geq 1} |r \cdot e^{2\pi i r m \tau}| = \sum_{r\geq 1} |r \cdot e^{-2\pi m r \mathrm{Im}(\tau)}| \leq \sum_{r\geq 1} |r \cdot e^{-2\pi m r}| < \infty, \quad \forall m \geq 1,$$

da $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Wir schätzen nun den Wert der inneren Summe ab. Definiere dazu

$$f : [1, \infty] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \cdot e^{-2mx\pi}.$$

Diese Funktion ist auf dem gesamten Defintionsbereich monton fallend. Deswegen kann man abschätzen

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{r\geq 1} r e^{2\pi i r m \tau}\right| \leq \left|\int_1^\infty f(x)\mathrm{dx}\right| &= \left|\int_1^\infty x \cdot e^{-2mx\pi}\mathrm{dx}\right| \\
&\overset{\text{partielle Integration}}{\leq} \left|\left[x e^{-2mx\pi} \cdot \frac{-1}{2m\pi}\right]_1^\infty\right| + \left|\int_1^\infty \frac{1}{2m\pi} e^{-2mx\pi}\mathrm{dx}\right| \\
&= \frac{e^{-2m\pi}}{2m\pi} \cdot \left(\frac{1}{2\pi m} + 1\right) =: \alpha_m
\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\sum_{m\geq 1} \left|\sum_{r\geq 1} r e^{2\pi i r m \tau}\right| \leq \sum_{m\geq 1} \alpha_m < \infty.$$

Damit ist die absolute konvergenz der Doppelsumme gezeigt und wir können die Terme m und r mit $rm = n$ zusammenfassen. Um zu verstehen, dass sich die zwei Summen zu einer zusammenfassen lassen interpretiert man die Doppelsumme als ein Doppelintegral und argumentiert mit dem Satz von Fubini. Es gibt also eine Umsortierung, die die Doppelsumme in eine einfache Summe überführt.

Verwendet man noch $\eta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ folgt die Behauptung, da die Fourier-Reihe eine auf $\mathbb{H}$ holomorpe Funktion darstellt. $\square$

Die normierte Version der Eisensteinreihe ist demnach definiert durch

$$G_2^* := \frac{1}{2\zeta(2)} G_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(\tau) e^{2\pi i n \tau}.$$

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten von G_2 unter Modulsubstitionen. Aus der Fourierentwicklung und aufgrund der Periodizität der Exponentialfunktion hat man direkt

$$G_2(\tau + 1) = G_2(\tau).$$

Weiterhin lässt sich folgendes Verhalten beobachten:

(1.2) Satz
Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt
$$G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi i \tau. \qquad \diamond$$

Wir erinnern an dieser Stelle an die Partialbruchzerlegung des Kotangens aus [1, S.109] VI(4.2),

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \tag{1}$$

wobei die Reihe auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergiert.

Außerdem wollen wir im Beweis [2, S.234] X(3.1) verwenden. Demnach gibt es für jedes Kompaktum $K \subseteq \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; \omega_2 \neq 0, \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}\}$ eine positive Konstante α, so dass

$$\alpha|m_1 i + m_2| \leq |m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \tag{2}$$

für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ und $(\omega_1, \omega_2) \in K$.

Beweis
Nach Defintion gilt:

$$\begin{aligned}
G_2(\tau) &= \sum_{n\neq 0} n^{-2} + \sum_{m\neq 0} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2}\Big) \\
&= \sum_{n\neq 0} n^{-2} + 2 \cdot \sum_{m\geq 1} \left(\sum_{n\geq 1} (m\tau + n)^{-2} + (m\tau - n)^{-2}\right) + \overbrace{2 \cdot \sum_{m\geq 1} (m\tau)^{-2}}^{\text{Term für } n=0} \\
&= \frac{\pi^2}{3}(1 + \tau^{-2}) + 2 \cdot \sum_{m\geq 1} \left(\sum_{n\geq 1} (m\tau + n)^{-2} + (m\tau - n)^{-2}\right).
\end{aligned}$$

Dabei verwenden wir $2 \cdot \sum_{m\geq 1} (m\tau)^{-2} = \frac{2}{\tau^2} \sum_{m\geq 1} m^{-2} = \frac{2}{\tau^2}\zeta(2)$ und $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
G_2(-1/\tau) &= \frac{\pi^2}{3}(1 + \tau^2) + 2 \sum_{m\geq 1} \left(\sum_{n\geq 1} (-\frac{m}{\tau} + n)^{-2} + (-\frac{m}{\tau} - n)^{-2}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3}(1 + \tau^2) + 2\tau^2 \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{m\geq 1} (-m\tau + n)^{-2} + (m\tau + n)^{-2}\right)
\end{aligned}$$

Als nützlich erweist sich die Abkürzung

$$A_{mn} := (m\tau + n)^{-2} + (m\tau - n)^{-2}.$$

Außerdem definieren wir

$$F(\tau) := \frac{1}{2\tau^2}(\tau^2 G_2(\tau) - G_2(-1/\tau)).$$

In dieser Differenz heben sich die Terme vor der Summe genau weg und man erhält

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{1}{2\tau^2}\left(2\tau^2\left(\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} A_{mn} - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} A_{mn}\right)\right) \\ &= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} A_{mn} - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} A_{mn}. \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, dass die Reihen nicht absolut konvergieren, die Summation darf also nicht vertauscht werden.

Desweiteren verwenden wir

$$\begin{aligned} B_{mn} &:= \frac{1}{m\tau + n - 1} - \frac{1}{m\tau + n} + \frac{1}{m\tau - n} - \frac{1}{m\tau - n + 1} \\ &= \frac{1}{(m\tau + n)(m\tau + n - 1)} + \frac{1}{(m\tau - n)(m\tau - n + 1)}. \end{aligned}$$

Mit (2) schätzt man ab

$$\begin{aligned} &|A_{mn} - B_{mn}| = \\ &= \left| \frac{1}{(m\tau + n)^2} - \frac{1}{(m\tau + n)(m\tau + n - 1)} + \frac{1}{(m\tau - n)^2} - \frac{1}{(m\tau - n)(m\tau - n + 1)} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{(m\tau + n)^2(m\tau + n - 1)} + \frac{1}{(m\tau - n)^2(m\tau - n + 1)} \right| \\ &\overset{(2)}{\leq} \frac{1}{\alpha_1 |m\cdot i + n|^2 |m\cdot i + (n-1)|} + \frac{1}{\alpha_2 |m\cdot i - n|^2 |m\cdot i - (n-1)|} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_1 (m^2 + n^2)(m^2 + (n-1)^2)^{1/2}} + \frac{1}{\alpha_2 (m^2 + n^2)(m^2 + (n-1)^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\alpha_1 (m^2 + n^2)(m^2 + (n^2 - 2n + 1)^{1/2}} + \frac{1}{\alpha_2 (m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - 2n + 1)^{1/2}} \\ &\in \mathcal{O}((m^2 + n^2)^{-3/2}), \end{aligned}$$

da die Terme von niedrigerer Ordnung vernachlässigbar sind. Für $m, n > 0$ gilt $(m-n)^2 > 0$ also $m^2 + n^2 > 2mn > mn$. Damit erhält man schließlich

$$|A_{mn} - B_{mn}| \in \mathcal{O}((m^2+n^2)^{-3/2}) \subseteq \mathcal{O}(m^{-3/2}n^{-3/2}).$$

Daraus folgt die absoluter Konvergenz und damit die Vertauschbarkeit der Summen

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}(A_{mn} - B_{mn}) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}(A_{mn} - B_{mn})$$

Das impliziert

$$\begin{aligned}
F(\tau) &= \left(\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} A_{mn} - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} A_{mn}\right) - \left(\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}(A_{mn} - B_{mn}) - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}(A_{mn} - B_{mn})\right)\\
&= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} A_{mn} - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}(A_{mn} - B_{mn}) - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} A_{mn} + \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}(A_{mn} - B_{mn})\\
&= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} B_{mn} - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} B_{mn}.
\end{aligned}$$

Wirft man einen Blick auf die erste Zeile der Definition von B_{nm}, dann sieht man ein, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} B_{mn} &= \frac{1}{m\tau} - \frac{1}{m\tau}\\
&\quad \underbrace{-\frac{1}{m\tau+1} + \frac{1}{m\tau-1} + \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{m\tau+n-1} - \frac{1}{m\tau+n} + \frac{1}{m\tau-n} - \frac{1}{m\tau-n+1}\right)}_{\text{Teleskopsumme}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\tau\sum_{m\geq 1} B_{mn} &= \sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m+(n-1)/\tau} - \frac{1}{m-(n-1)/\tau} - \frac{1}{m+n/\tau} + \frac{1}{m-n/\tau}\right)\\
&= \sum_{m\geq 1}\left(\frac{2(n-1)/\tau}{((n-1)/\tau)^2 - m^2} - \frac{2n/\tau}{(n/\tau)^2 - m^2}\right)
\end{aligned}$$

Setze für $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\phi(n) &:= \pi\cot(\pi n/\tau) - \frac{1}{n/\tau}, \quad n \neq 0,\\
\phi(0) &:= 0.
\end{aligned}$$

Mit der Partialbruchentwicklung des Kotangens (1) folgt direkt

$$\phi(n) = \sum_{m\geq 1} \frac{2n/\tau}{(n/\tau)^2 - m^2}, \quad n \geq 0,$$

was widerum

$$\tau \sum_{m\geq 1} B_{mn} = \phi(n-1) - \phi(n)$$

impliziert. Zusammenfassend erhält man eine Teleskopsumme und kann vereinfachen

$$\begin{aligned}\tau \cdot F(\tau) &= -\tau \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} B_{mn} = -\sum_{n\geq 1}(\phi(n-1) - \phi(n)) \\ &= -\phi(0) + \lim_{n\to\infty}\phi(n) = \lim_{n\to\infty}\phi(n).\end{aligned}$$

Bekanntermaßen ist

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Setze $z := x + iy$. Auf $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ angewandt ergibt das

$$\cot(z) = i \cdot \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}$$

und dieser Term geht für $y \to -\infty$ gegen i. Da $\tau \in \mathbb{H}$ ist, folgt $\mathrm{Im}(1/\tau) < 0$. Das heißt für $n \to \infty$ geht $\mathrm{Im}(\pi n/\tau)$ gegen $-\infty$ und damit $\phi(n) = \pi\cot(\pi n/\tau) - \frac{1}{n/\tau}$ gegen πi. Es folgt

$$\tau \cdot F(\tau) = \lim_{n\to\infty}\phi(n) = \pi i = \frac{1}{2}\tau G_2(\tau) - \frac{1}{2\tau} G_2(-1/\tau). \qquad \square$$

Umformen der Gleichung nach $G_2(-1/\tau)$ liefert die Behauptung.

§2 Das Transformationsverhalten der η - Funktion

Die Dedekindsche η- Funktion $\eta : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\eta(\tau) := e^{\pi i\tau/12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau}).$$

Die Konvergenz und Holomorphie folgen aus [1, S.140], VIII(2.6), da $\sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i m\tau}$ als geometrische Reihe lokal absolut gleichmäßig auf $\mathbb{H}$ konvergiert. Außerdem ist $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{H}$, deswegen ist η nullstellenfrei. Die η-Funktion weist ein überschaubares Transformationsverhalten auf. So gilt

$$\begin{aligned}\eta(\tau+1)=&e^{\pi i(\tau+1)/12} \cdot \prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m(\tau+1)})\\ =&e^{\pi i/12} \cdot e^{\pi i\tau/12} \cdot \prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m\tau}\underbrace{e^{2\pi i m}}_{=1})\\ =&e^{\pi i/12} \cdot \eta(\tau).\end{aligned}$$

Zusammengefasst bedeutet das

$$\eta(\tau+1)=e^{\pi i/12} \cdot \eta(\tau), \quad \forall\tau \in \mathbb{H}. \tag{3}$$

Desweiteren gilt

(2.1) Satz
Es gilt

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \eta(\tau) \quad \forall\tau \in \mathbb{H}.$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv wird. ◇

Beweis
Definiere $f(\tau) := \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}$. Um eine Reihendarstellung für f zu erhalten, werden wir [1, S.142] VIII(2.12) auf $\prod_{m\geq 1}(1-e^{2\pi i m\tau})$ anwenden. Demnach gilt für $f_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph, $f \not\equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$ und ein auf $\mathbb{H}$ absolut lokal gleichmäßig konvergentes Produkt $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_k(z)$, dass

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'}{f_k}$$

und die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{H}$. Auf unsere Situation bezogen ergibt das

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1} \frac{(1-e^{2\pi i m\tau})'}{(1-e^{2\pi i m\tau})} &\overset{[1,S.142]}{=} \frac{\left(\prod_{m\geq 1}(1-e^{2\pi i m\tau})\right)'}{\left(\prod_{m\geq 1}(1-e^{2\pi i m\tau})\right)} = \frac{(e^{-\pi i\tau/12} \cdot \eta(\tau))'}{(e^{-\pi i\tau/12} \cdot \eta(\tau))} =\\ &= \frac{\frac{-\pi i}{12} e^{-\pi i\tau/12} \cdot \eta(\tau) + e^{-\pi i\tau/12} \cdot \eta'(\tau)}{e^{-\pi i\tau/12} \cdot \eta(\tau)} = -\frac{\pi i}{12} + \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}.\end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
f(\tau) = \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} &= \sum_{m\geq 1} \frac{(1-e^{2\pi i m\tau})'}{(1-e^{2\pi i m\tau})} + \frac{\pi i}{12} = \\
&= -\sum_{m\geq 1} \frac{2\pi i m \cdot e^{2\pi i m\tau}}{(1-e^{2\pi i m\tau})} + \frac{\pi i}{12} = \frac{\pi i}{12}\left(1 - 24 \cdot \sum_{m\geq 1} m \cdot \frac{e^{2\pi i m\tau}}{(1-e^{2\pi i m\tau})}\right) = \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{\pi i}{12}\left(1 - 24 \cdot \sum_{m\geq 1}\sum_{r\geq 1} m \cdot e^{2\pi i r m\tau}\right) = \\
&= \frac{\pi i}{12}\left(1 - 24 \cdot \sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n\tau}\right) \\
&\overset{(1.1)}{=} \frac{i}{4\pi} G_2(\tau).
\end{aligned}$$

Mit (1.2) folgt

$$f(-1/\tau) = \frac{i}{4\pi} G_2(-1/\tau) = \overbrace{\frac{i}{4\pi} \cdot \tau^2 \cdot G_2(\tau)}^{=\tau^2 f(\tau)} - \overbrace{\frac{i}{4\pi} 2\pi i\tau}^{-\tau/2}.$$

Division durch τ^2 resultiert in

$$\frac{1}{\tau^2} f(-1/\tau) = f(\tau) + \frac{1}{2\tau}. \tag{4}$$

Setze $g(y) := \frac{\eta(i/y)}{\eta(iy)\sqrt{y}}$, $y > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{g'(y)}{g(y)} &= \frac{\eta(iy)\sqrt{y} \cdot \eta'(i/y) \cdot (-i/y^2) - \eta(i/y)(\eta(iy) \cdot \sqrt{y})'}{\eta^2(iy)y} \cdot \frac{\eta(iy)\sqrt{y}}{\eta(i/y)} \\
&= \frac{\eta'(i/y)}{\eta(i/y)}(-i/y^2) - i \cdot \frac{\eta'(iy)}{\eta(iy)} - \frac{1}{2y} \\
&= f(i/y)(-i/y^2) - i \cdot f(iy) - \frac{1}{2y}.
\end{aligned}$$

Für die letze Gleichheit setzt man $\tau = iy$ in (4) ein und verwendet $1/i = -i$. Das zeigt $g' \equiv 0$, somit ist g konstant. Es existiert ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\eta(i/y) = \gamma \cdot \sqrt{y} \cdot \eta(iy)$. Betrachtet man $y = 1$, folgert man direkt $\gamma = 1$. Wir haben nun die geforderte Behauptung für $\tau = iy$ gezeigt. Der Identitätssatz schließt den Beweis ab. $\square$

Es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen der η - Funktion und der normierten Diskriminante

$$\Delta^* = \frac{1}{1728}(G_4^{*3} - G_6^{*2}),$$

wobei G_4^* und G_4^* die normierten Eisensteinreihen sind.

(2.2) Satz
Es gilt $\eta^{24} = \Delta^*$. ◇

Beweis
Offenbar ist $f := \eta^{24}$ holomorph auf $\mathbb{H}$, da η das ist. Nach Definition der η- Funktion gilt:

$$f(\tau) = e^{2\pi i\tau} \prod_{m\geq 1}(1 - e^{2\pi i m\tau})^{24} = e^{2\pi i\tau} + \dots, \quad \tau \in \mathbb{H}$$

Damit hat f eine Fourier-Entwicklung mit Koeffizienten $\alpha_f(0) = 0$ und $\alpha_f(1) = 1$. Mit (2.1) und (3) erkennt man

$$\begin{aligned} f(\tau+1) &= f(\tau) \\ f(-1/\tau) &= (\tau/i)^{12} f(\tau) = \tau^{12} \cdot f(\tau). \end{aligned}$$

Da bekanntermaßen $\tau \mapsto \tau + 1$ und $\tau \mapsto -1/\tau$ die Modulsubstitutionen erzeugen, folgt $f \in \mathbb{S}_{12}$. Aus [2, S.310] XII(4.2) wissen wir $\mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta^*$, also $f = \lambda \cdot \Delta^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen $\alpha_{\Delta^*}(1) = 1 = \alpha_f(1)$ ist $\lambda = 1$ und die Behauptung folgt. □

Erinnern wir uns an Theta-Reihen aus [1, S.113] VI.5. Demnach nennt man für $u, v \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{H}$,

$$\Theta(u, v; \tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n+u)^2\tau + 2\pi i(n+u)v}$$

die Theta-Reihe in τ zur Charakteristik (u, v). In [1, S.114] VI.(5.3) wird das Transformationsverhalten beschrieben. Für alle $u, v \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\Theta(-v, u; -1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot e^{-2\pi i uv} \cdot \Theta(u, v; \tau). \tag{5}$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen der für $\tau = iy$ positiv ist. Wir interessieren uns an dieser Stelle für den Spezialfall der Charakteristik $(0, 0)$:

$$\theta(\tau) := \Theta(0, 0; \tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau}. \tag{6}$$

Das Transformationsverhalten (5) vereinfacht sich dann zu

$$\theta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \theta(\tau).$$

Betrachtet man nun den Quotienten $\psi(\tau) := \theta(\tau)/\eta(\tau)$, $\tau \in \mathbb{H}$, erkennt man direkt

$$\psi(-1/\tau) = \psi(\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Außerdem ist ψ holomorph auf $\mathbb{H}$, da η auf $\mathbb{H}$ nullstellenfrei ist. Aus der Reihendarstellung (6) kann man ablesen

$$\theta(\tau+2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(e^{\pi i n^2 \tau} \cdot e^{2\pi i n^2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}.$$

Mit dem Transformationsverhalten der η - Funktion (3) zusammen ergibt das

$$\psi(\tau+2) = \frac{\theta(\tau+2)}{\eta(\tau+2)} = \frac{\theta(\tau)}{e^{\pi i/6} \cdot \eta(\tau)} = e^{-\pi i/6} \cdot \psi(\tau).$$

Als Anknüpfung an den vorangegangenen Vortrag erkennt man, dass

$$\psi(M\tau) = \nu(M)\psi(\tau), \quad \forall M \in \Gamma_\theta$$

mit einer 12. Einheitswurzel $\nu(M)$. Dabei ist $\Gamma_\theta < \Gamma$ die Theta-Gruppe, die Untergruppe der Modulgruppe erzeugt von den Matrizen

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Literatur

[1] Aloys Krieg
Funktionentheorie 1.
A.Krieg, Aachen 2008

[2] Aloys Krieg
Funktionentheorie 2.
A.Krieg, Aachen 2012