
Hyperbolische Geometrie

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 07.01.2013

Daniela Thevis

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Einführung	3
3	Verhalten von Kreisen	4
3.1	Kreise und Geraden unter gebrochen linearen Transformationen . . .	4
3.2	Die obere Halbebene und der Einheitskreis	6
3.3	\mathbb{H} als homogener Raum	8
4	Eine invariante Metrik auf \mathbb{H}	14
4.1	Explizite Formeln für den \mathbb{H} -Abstand	20
	Literaturverzeichnis	25

§1 Einleitung

Grundlage dieser Arbeit sind Ausschnitte aus dem Buch Elliptische Funktionen und Modulformen, 2.Auflage von Koecher und Krieg. Es werden die Seiten 111, 115, 116 und 118-122 behandelt. Zu Beginn werden einige Ergebnisse aus der Funktionentheorie eingeführt, die für den weiteren Verlauf wichtig sind. Zunächst wird das Verhalten von Kreisen unter gebrochen linearen Transformationen betrachtet. Im weiteren Verlauf richtet sich der Blickpunkt auf die obere Halbebene \mathbb{H} . Insbesondere wird die Automorphismengruppe der oberen Halbebene untersucht. In der oberen Halbebene betrachten wir Orthogonalkreise und deren Verhalten unter den Automorphismen von \mathbb{H} . Dabei soll genauer auf die spezielle orthogonale Gruppe und die Untergruppe der speziellen linearen Matrizen eingegangen werden.

Im Paragraph 3 ist das Ziel die Länge eines Weges in \mathbb{C} bestimmen zu können. Dazu wird eine Metrik, genannt die hyperbolische Metrik, eingeführt. Von dieser Metrik werden einige Eigenschaften gezeigt und schließlich eine direkte Darstellung gefunden.

§2 Einführung

Zu Beginn sollen einige Ergebnisse der Funktionentheorie angegeben werden, die im Folgenden nur benutzt werden. Nachzulesen sind die Beweise beispielsweise in [1] und [2].

Zunächst werden einige Notationen eingeführt.

Die obere Halbebene wird mit

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}; \text{Im}(\tau) > 0\}$$

bezeichnet, der Einheitskreis mit

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

und für $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in \mathbb{C} ist

$$\text{Aut}(G) := \{\varphi : G \rightarrow G; \varphi \text{ biholomorph}\}$$

eine Gruppe bezüglich Komposition, genannt Automorphismengruppe.

Im Folgenden hat eine Matrix $M \in \text{Mat}(2 \times 2, K)$ in der Regel die Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in K$.

Die spezielle orthogonale Gruppe vom Grad 2 ist definiert als

$$SO(2; \mathbb{R}) := \{U \in GL(2; \mathbb{R}); U^{-1} = U^T \text{ und } \det(U) = 1\}$$

und die Gruppe der speziellen linearen Matrizen vom Grad 2 in \mathbb{R} als

$$SL(2; \mathbb{R}) := \{U \in GL(2; \mathbb{R}); \det(U) = 1\}.$$

Dabei ist $SO(2; \mathbb{R})$ eine Untergruppe von $SL(2; \mathbb{R})$.

(2.1) Definition

Für $M \in GL(2; \mathbb{C})$ ist die Abbildung

$$\Phi_M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \tau \mapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d'}$$

eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} , die auch als gebrochen lineare Transformation oder als Möbius-Transformation bezeichnet wird.

Ein Beispiel einer solchen Abbildung ist die Cayley-Transformation

$$\Phi_C : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad \tau \mapsto \frac{\tau - i}{\tau + i}.$$

Diese Abbildung ist biholomorph mit

$$(\Phi_C)^{-1} = \Phi_{C^{-1}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}.$$

§3 Verhalten von Kreisen

Zu Beginn wird das Verhalten von Kreisen und Geraden unter gebrochen linearen Transformationen betrachtet.

— *Kreise und Geraden unter gebrochen linearen Transformationen* —

Hier soll das Verhalten von Kreisen in \mathbb{C} unter gebrochen linearen Transformationen untersucht werden.

Nach [2] kann jeder Kreis in \mathbb{C} durch eine Gleichung der Form

$$A\tau\bar{\tau} + B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \text{ mit } A, C \in \mathbb{R}, A \neq 0 \text{ und } B \in \mathbb{C}$$

geschrieben werden. Des Weiteren hat der Kreis dann den Mittelpunkt $m = -\bar{B}/A$ und den Radius r mit $r^2 = (|B|^2 - AC)/A^2$. Für $A = 0$ und $B \neq 0$ sind dies gerade die Geraden in \mathbb{C} . Umgekehrt stellt eine solche Gleichung stets einen Kreis beziehungsweise eine Gerade da.

(3.1) Satz

Unter gebrochen linearen Transformationen geht die Menge der Kreise und Geraden in \mathbb{C} in sich über.

Beweis

Die gebrochen linearen Transformationen werden von den Abbildungen $\varphi_\alpha : \tau \mapsto \tau + \alpha$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, und $\varphi_I : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$, erzeugt. Somit genügt es zu zeigen, dass unter diesen beiden Abbildungen die Menge der Kreise und Geraden in sich übergeht. Sei τ ein beliebiger Punkt eines Kreisbogens. Dann erfüllt τ die Kreisgleichung

$$A\tau\bar{\tau} + B\tau + \bar{B}\bar{\tau} + C = 0.$$

Es gilt

$$z = \varphi(\tau) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(z) = \tau.$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{-1} : \tau &\mapsto \tau - \alpha, \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und} \\ \varphi_I^{-1} : \tau &\mapsto -\frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

Für beide Abbildungen wird nun nachgerechnet, dass auch der Bildpunkt z eine Kreisgleichung erfüllt. Zunächst wird die Abbildung φ_α betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} &A\tau\bar{\tau} + B\tau + \bar{B}\bar{\tau} + C = 0 \\ \Leftrightarrow &A(z - \alpha)(\bar{z} - \alpha) + B(z - \alpha) + \bar{B}(\bar{z} - \alpha) + C = 0 \\ \Leftrightarrow &Az\bar{z} + (-A\alpha + B)z + \overline{(-A\alpha + B)}\bar{z} + A\alpha^2 - (B + \bar{B})\alpha + C = 0 \\ \Leftrightarrow &\tilde{A}z\bar{z} + \tilde{B}z + \bar{\tilde{B}}\bar{z} + \tilde{C} = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A \in \mathbb{R}, \\ \tilde{B} &= -A\alpha + B \in \mathbb{C} \text{ und} \\ \tilde{C} &= A\alpha^2 - \underbrace{(B + \bar{B})}_{\in \mathbb{R}}\alpha + C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{B}|^2 - \tilde{A}\tilde{C} &= A^2\alpha^2 - B\alpha A\alpha - \bar{B}A\alpha + \bar{B}\bar{B} - A^2\alpha^2 + B\alpha A\alpha + \bar{B}A\alpha - CA \\ &= \bar{B}\bar{B} - CA > 0 \text{ nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Und damit gilt $\tilde{r} = \frac{|\tilde{B}|^2 - \tilde{A}\tilde{C}}{A^2} > 0$. Somit bleibt die Behauptung noch für die Abbildung φ_I zu zeigen. Dazu gehe man analog zu oben vor und erhält:

$$\begin{aligned} A\tau\bar{\tau} + B\tau + \bar{B}\bar{\tau} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow A\left(\frac{-1}{z}\left(\frac{-1}{z}\right)\right) + B\frac{-1}{z} + \bar{B}\frac{-1}{z} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow A\frac{1}{z\bar{z}} - B\frac{1}{z} - \bar{B}\frac{1}{\bar{z}} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow Cz\bar{z} + (-B)\bar{z} + (-\bar{B})z + A &= 0 \\ \Leftrightarrow \tilde{A}z\bar{z} + \tilde{B}\bar{z} + \tilde{B}z + \tilde{C} &= 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= C \in \mathbb{R}, \\ \tilde{B} &= -\bar{B} \in \mathbb{C} \text{ und} \\ \tilde{C} &= A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{B}|^2 - \tilde{A}\tilde{C} &= |-\bar{B}|^2 - CA \\ &= |B|^2 - AC > 0 \text{ nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Demnach ist $\tilde{r} = \frac{|\tilde{B}|^2 - \tilde{A}\tilde{C}}{A^2} > 0$. □

— Die obere Halbebene und der Einheitskreis —

Hier werden die Automorphismen der oberen Halbebene \mathbb{H} genauer betrachtet und dann das Verhalten von Orthogonalkreisen unter diesen.

Die Automorphismen der oberen Halbebene \mathbb{H} sind genau die Abbildungen

$$\varphi_M : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \tau \mapsto M\tau, \text{ wobei } M \in \text{SL}(2; \mathbb{R}).$$

(3.2) Lemma

Die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{H})$ wird erzeugt von den Abbildungen

$$\begin{aligned} T_\alpha : \tau &\mapsto \tau + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ der Translation,} \\ D_\lambda : \tau &\mapsto \lambda\tau, 0 < \lambda \in \mathbb{R} \text{ der Drehung und} \\ I : \tau &\mapsto -\frac{1}{\tau} \text{ der Inversion.} \end{aligned}$$

Beweis

Mit [2], S.265 folgt

$$\begin{aligned} \varphi_M(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} &= \begin{cases} \frac{a\tau + b}{d} = \frac{a}{d}\tau + \frac{b}{d}, & \text{wenn } c = 0 \\ \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\tau + d/c}, & \text{wenn } c \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} T_{b/d} \circ D_{a/d}(\tau), & \text{wenn } c = 0 \\ T_{a/c} \circ D_{1/c^2} \circ I \circ T_{d/c}(\tau), & \text{wenn } c \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

(3.3) Korollar

Die Gruppe $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ wird erzeugt von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}; \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.4) Definition

Ein Orthogonalkreis von \mathbb{H} ist jeder in \mathbb{H} gelegene Teil eines Kreisbogens beziehungsweise jede Halbgerade in \mathbb{H} , der beziehungsweise die auf der reellen Achse senkrecht steht. Im Falle eines Kreisbogens ist es ein Halbkreis mit Mittelpunkt auf der reellen Achse.

(3.5) Bemerkung

Die Abbildung $\tau \mapsto \lambda\tau$, $\lambda > 0$, kann man aus den Abbildungen $\tau \mapsto \tau + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und $\tau \mapsto -1/\tau$, zusammensetzen. Dazu nutzt man die Hua-Identität, welche besagt, dass mit $\lambda\mu = 1$

$$\mu^2\tau = -(\lambda - [\mu - (\tau + \lambda)^{-1}]^{-1})^{-1}.$$

Betrachtet wird die Abbildung $D_\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \tau \mapsto \lambda\tau$. Dann existiert, da $\lambda \neq 0$, ein $\mu \in \mathbb{R}^*$ mit $\mu^2 = \lambda$ und ein $\eta \in \mathbb{R}$ mit $\mu\eta = 1$. Des Weiteren sei $T_\eta(\tau) = \tau + \eta$ und $I(\tau) = -\tau^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = \lambda\tau &= \mu^2\tau = -(\eta - [\mu - (\tau + \eta)^{-1}]^{-1})^{-1} \\ &= I \circ T_\eta \circ I \circ T_\mu \circ I \circ T_\eta(\tau). \end{aligned}$$

(3.6) Proposition

Unter den Automorphismen von \mathbb{H} gehen Orthogonalkreise in Orthogonalkreise über.

Beweis

Nach der letzten Bemerkung genügt es, die Behauptung für die Erzeuger der Automorphismengruppe von \mathbb{H} zu zeigen, also für die Abbildungen $\tau \mapsto -1/\tau$ und $\tau \mapsto \tau + \alpha$. Dabei gilt die Behauptung für die Translation $\tau \mapsto \tau + \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, da es sich lediglich um eine Verschiebung auf der reellen Achse handelt. Somit bleibt die Behauptung für $\tau \mapsto -1/\tau$ zu zeigen. Dazu erinnern wir uns daran, dass sich jeder Kreis in \mathbb{C} in der folgenden Darstellung schreiben lässt. Dabei gilt für Orthogonalkreise $B \in \mathbb{R}$, da der Mittelpunkt von Orthogonalkreisen $m = -\frac{\bar{B}}{A} \in \mathbb{R}$ ist, da dieser auf der reellen Achse liegt. In dieser Kreisgleichung wird τ durch $-1/z$ ersetzt, da für $\varphi(\tau) = -1/\tau$ gilt, dass $\varphi^{-1}(\tau) = -1/\tau$. Folglich ist für geeignete $0 \neq A, B, C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & A\tau\bar{\tau} + B(\tau + \bar{\tau}) + C = 0 \\ \Leftrightarrow & A\left(\frac{-1}{z}\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right)\right) + B\left(\frac{-1}{z} - \frac{-1}{\bar{z}}\right) + C = 0 \\ \Leftrightarrow & A\frac{1}{z\bar{z}} - B\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) + C = 0 \\ \Leftrightarrow & Cz\bar{z} + (-B)(\bar{z} + z) + A = 0. \end{aligned}$$

Für $\tilde{A} := C, \tilde{B} := -B$ und $\tilde{C} := A$ gilt $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathbb{R}$ und

$$\tilde{A}z\bar{z} + \tilde{B}(z + \bar{z}) + \tilde{C} = 0$$

ist ein Orthogonalkreis. Dabei ist $\tilde{A} = 0$ wenn $C = 0$ ist, das bedeutet, dass Kreise mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und alle Geraden durch diesen Punkt auf Geraden abgebildet werden. Für alle anderen Kreise und Geraden für die $C \neq 0$ gilt, ist das Bild ein Kreis, da $\tilde{A} \neq 0$. \square

— \mathbb{H} als homogener Raum —

Zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$, mit $\tau = x + iy$, existiert ein $M \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$, mit $\tau = Mi$. Ein Beispiel für ein solches M ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}.$$

Seien $M, L \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$ zwei Matrizen mit $\tau = Mi = Li$. Mit ([2], XI(1.1)) gilt dann $(L^{-1}M)i = i$. Folglich existiert ein $K \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$ mit $L^{-1}M = K$. Somit erfüllt K auch die folgenden Eigenschaften

$$M = LK \text{ und } Ki = i.$$

(3.7) Proposition

Für $K \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$ sind äquivalent:

- i) $Ki = i$
- ii) $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$
- iii) $K \in \text{SO}(2) := \{M \in \text{SL}(2; \mathbb{R}); M \text{ orthogonal}\}$
- iv) Für $C := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ gilt $CKC^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$.

Beweis

i) \Leftrightarrow ii)

Sei $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Ki = i &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} i = i \\ &\Leftrightarrow \alpha i + \beta = -\gamma + \delta i \\ &\Leftrightarrow \alpha = \delta, \beta = -\gamma \text{ und, da } K \in \text{SL}(2; \mathbb{R}), \text{ gilt } \det(K) = \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{aligned}$$

ii) \Rightarrow iii)

Da $K \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$, gilt $\det(K) = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ und somit ist

$$K^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = K^T.$$

Also ist K orthogonal und somit $K \in \text{SO}(2)$.

iii) \Rightarrow ii)

Sei $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$. Dann ist $K^T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $K^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$. Dabei folgt aus $K \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$, dass $\det(K) = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Zudem gilt, da $K \in \text{SO}(2)$, dass $K^{-1} = K^T$. Somit ist $\alpha = \delta, \gamma = -\beta$ und folglich $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

ii) \Rightarrow iv)

Dazu sei $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} CKC^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ i/2 & -i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta)/2 & (\alpha - i\beta)/2 \\ (-\beta + i\alpha)/2 & (-\beta - i\alpha)/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta + i\beta + \alpha & \alpha - i\beta + i\beta - \alpha \\ \alpha + i\beta - i\beta - \alpha & \alpha - i\beta - i\beta + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da $|\alpha + i\beta| = 1$ und folglich $\alpha + i\beta = e^{i\varphi}$, für ein $\varphi \in \mathbb{R}$ und $\alpha - i\beta = \overline{\alpha + i\beta} = e^{-i\varphi}$.

(iv) \Rightarrow (ii)

Es gilt $CKC^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ mit $e^{i\varphi} = a + ib$. Durch Rechtsmultiplikation von C und Linksmultiplikation mit C^{-1} ergibt sich $K = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ und da $|e^{i\varphi}| = 1$, gilt $a^2 + b^2 = 1$.

□

Wie zu Beginn eingeführt gilt

$$\begin{aligned} \text{SO}(2; \mathbb{R}) &:= \{U \in \text{GL}(2; \mathbb{R}); U^{-1} = U^T \text{ und } \det(U) = 1\} \text{ und} \\ \text{SL}(2; \mathbb{R}) &:= \{U \in \text{GL}(2; \mathbb{R}); \det(U) = 1\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\text{SO}(2; \mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\text{SL}(2; \mathbb{R})$. Denn die Einheitsmatrix E liegt in $\text{SO}(2; \mathbb{R})$, da $\det(E) = 1$ und $E = E^T = E^{-1}$. Außerdem gilt für $M \in \text{SO}(2; \mathbb{R})$

$\det(M^{-1}) = \det(M^T) = \det(M) = 1$ und mit $(M^T)^T = M$ auch $M^{-1} = M^T \in \text{SO}(2; \mathbb{R})$.

Für zwei Matrizen $M, N \in \text{SO}(2; \mathbb{R})$ gilt

$$\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1$$

und wegen

$$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} = N^T M^T = (MN)^T \text{ gilt } MN \in \text{SO}(2; \mathbb{R}).$$

Folglich ist $\text{SO}(2; \mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ und es kann der folgende Quotientenraum gebildet werden

$$\text{SL}(2; \mathbb{R}) / \text{SO}(2; \mathbb{R}) := \{L * \text{SO}(2; \mathbb{R}); L \in \text{SL}(2; \mathbb{R})\}.$$

Es liegt allerdings keine Faktorgruppe vor, da $\text{SO}(2; \mathbb{R})$ kein Normalteiler ist. Denn beispielsweise für $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$ und $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SO}(2; \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} M^{-1}NM &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allerdings ist

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Somit liegt $M^{-1}NM$ nicht in $\text{SO}(2; \mathbb{R})$ und folglich ist $\text{SO}(2; \mathbb{R})$ kein Normalteiler in $\text{SL}(2; \mathbb{R})$. Es liegt also kein Faktorraum sondern ein so genannter homogener Raum vor.

Die Gruppe $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ operiert von links auf dem Quotientenraum $\text{SL}(2; \mathbb{R}) / \text{SO}(2; \mathbb{R})$ folgendermaßen

$$(M, L * \text{SO}(2; \mathbb{R})) \mapsto (ML) \text{SO}(2; \mathbb{R}) \text{ mit } M \in \text{SL}(2; \mathbb{R}).$$

(3.8) Lemma

Die Abbildung

$$\varphi : \text{SL}(2; \mathbb{R}) / \text{SO}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}, L * \text{SO}(2; \mathbb{R}) \mapsto Li$$

ist mit der Proposition (3.9) eine unter der oben genannten Operation verträgliche Bijektion.

Beweis

Seien $L, \tilde{L} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ und $M \in \mathrm{SO}(2; \mathbb{R})$ mit $\tilde{L}M = L$. Dann gilt $L * \mathrm{SO}(2; \mathbb{R}) = \tilde{L} * \mathrm{SO}(2; \mathbb{R})$. Zunächst wird die Verträglichkeit der Abbildung unter der oben genannten Operation gezeigt:

$$\begin{aligned}\varphi((ML) \mathrm{SO}(2; \mathbb{R})) &= (ML)i \\ M\varphi(L \mathrm{SO}(2; \mathbb{R})) &= M(Li) = (ML)i.\end{aligned}$$

Dabei ist φ bijektiv, da φ injektiv und surjektiv ist. Zunächst soll die Injektivität bewiesen werden. Dazu seien L, \tilde{L} aus $\mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{L} * \mathrm{SO}(2; \mathbb{R})) &= \varphi(L * \mathrm{SO}(2; \mathbb{R})) \\ \Rightarrow \tilde{L}i &= Li \\ \Rightarrow L^{-1}\tilde{L} &= i \\ \Rightarrow \text{es existiert ein } M \in \mathrm{SO}(2; \mathbb{R}) &\text{ mit } L^{-1}\tilde{L} = M \\ \Rightarrow \tilde{L} * \mathrm{SO}(2; \mathbb{R}) &= L * \mathrm{SO}(2; \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Die Surjektivität von φ folgt sofort aus Satz(3.9), den wir als nächstes beweisen und der besagt, dass zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ eine Transformation $N \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ mit $Ni = \tau$ existiert. \square

Daher schreibt man auch

$$\mathbb{H} \cong \mathrm{SL}(2; \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2; \mathbb{R}).$$

Mit Hilfe der Proposition (3.7) kann zudem eine verschärfte Transitivitätsaussage bewiesen werden.

(3.9) Satz

Seien $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}, \tau_1 \neq \tau_2$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\lambda > 1$ und eine eindeutig bestimmte Transformation $\tau \mapsto M\tau$, $M \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$, sodass

$$M\tau_1 = i \text{ und } M\tau_2 = \lambda i.$$

Beweis

Nach [1], (VII (2.10),(2.11) und (4.3)) sind die Automorphismen von \mathbb{H} gerade die Transformationen

$$\Phi_{\tilde{M}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \text{ mit } \tilde{M} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R}).$$

Für $\tau_1 \in \mathbb{H}$ wähle $N = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Im}(\tau_1)}} \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{Re}(\tau_1) \\ 0 & \operatorname{Im}(\tau_1) \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi_N(\tau_1) &= N\tau_1 = i \text{ und} \\ \Phi_N(\tau_2) &= N\tau_2 = \frac{\tau_2 - \operatorname{Re}(\tau_1)}{\operatorname{Im}(\tau_1)}. \end{aligned}$$

Gesucht wird nun eine Abbildung Φ , die i festhält und $\Phi_N(\tau_2)$ auf λi mit $\lambda > 1$ abbildet. Mithilfe der Cayley-Transformation ist es möglich, dieses Problem in den Einheitskreis zu verlagern. Das heißt gesucht ist nun ein Automorphismus von \mathbb{E} , der Null festhält und $\Phi_C(\Phi_N(\tau_2))$ geeignet abbildet. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \Phi_C(\Phi_N(\tau_1)) &= \Phi_C(i) = 0 \in \mathbb{E} \text{ und} \\ \Phi_C(\Phi_N(\tau_2)) &= \mu \in \mathbb{E}. \end{aligned}$$

Sei also Ψ eine biholomorphe Funktion von \mathbb{E} mit Fixpunkt Null. Dann hat Ψ nach [1], VII(2.5) die Form

$$\Psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, z \mapsto e^{iv}z, v \in [0, 2\pi).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \Psi(\Phi_C(\Phi_N(\tau_1))) &= \Psi(0) = 0 \text{ und} \\ \Psi(\Phi_C(\Phi_N(\tau_2))) &= \Psi(\mu) = e^{iv}\mu, \end{aligned}$$

wobei hier $v = -\arg(\Phi_C(\Phi_N(\tau_2)))$ zu wählen sei. Dann ist $\Psi(\Phi_C(\Phi_N(\tau_2))) = e^{iv}\mu = s \in (0, 1)$. Zurück transformiert in \mathbb{H} ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_{C^{-1}}(\Psi(\Phi_C(\Phi_N(\tau_1)))) &= \Psi_{C^{-1}}(0) = i \text{ und} \\ \Phi_{C^{-1}}(\Psi(\Phi_C(\Phi_N(\tau_2)))) &= \Psi_{C^{-1}}(s) = i \underbrace{\frac{1+s}{1-s}}_{=: \lambda} = \lambda i. \end{aligned}$$

Dabei gilt mit $s \in (0, 1)$, dass $\frac{1+s}{1-s} > 1$. Somit ist die Existenz einer Matrix M mit $M\tau_1 = i$ und $M\tau_2 = \lambda i$ gezeigt und es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen.

Um die Eindeutigkeit nachzuweisen, sei $M' \in \operatorname{SL}(2; \mathbb{R})$ und $\lambda' > 1$ mit

$$M'\tau_1 = i \text{ und } M'\tau_2 = \lambda' i.$$

Dann gilt für $K = M'M^{-1} \in \operatorname{SL}(2; \mathbb{R})$

$$Ki = i \text{ und } K\lambda i = \lambda' i,$$

denn

$$M'M^{-1}i = M'\tau_1 = i \text{ und } M'M^{-1}\lambda i = M'\tau_2 = \lambda'i.$$

Da $K \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$ mit $Ki = i$, folgt mit der Proposition (3.7), dass $K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Mit $K\lambda i = \lambda'i$ gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \lambda i &= \frac{\alpha\lambda i + \beta}{\alpha - \beta\lambda i} = \lambda'i \\ \Leftrightarrow \alpha\lambda i + \beta &= \lambda'i(-\beta\lambda i + \alpha) \\ \Leftrightarrow \lambda' &= \lambda \text{ und somit } K = \pm E. \end{aligned}$$

Damit ist die Transformation $\tau \mapsto M\tau$ eindeutig bestimmt.

□

§4 Eine invariante Metrik auf \mathbb{H}

In diesem Kapitel geht es um die Länge eines Weges in \mathbb{C} . Es wird eine Metrik auf \mathbb{H} definiert, die so genannte hyperbolische Metrik. Um diese explizit angeben zu können, muss im weiteren Verlauf das Doppelverhältnis definiert werden. Zunächst soll die hyperbolische Metrik aber definiert und einige Eigenschaften aufgezeigt werden. Dazu wird zunächst die Definition eines Weges wiederholt.

(4.1) Definition

Eine Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ eines reellen Intervalls nach \mathbb{H} heißt Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$, wenn γ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

(4.2) Definition

Im Gegensatz zur euklidischen Länge von γ nennen wir

$$L(\gamma) := \int_{\gamma} \frac{|d\tau|}{\text{Im}(\tau)} = \int_a^b \frac{|\gamma'(\xi)|}{\text{Im}\gamma(\xi)} d\xi$$

die \mathbb{H} -Länge oder hyperbolische Länge von γ .

Die hyperbolische Länge eines Weges ist unabhängig von der Parameterdarstellung des Weges.

(4.3) Bemerkung

Für eine Matrix $M \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ wird die Abkürzung

$$M\gamma := \Phi_M \circ \gamma$$

genutzt. Aus der [1], (XI(1.1)) benötigen wir diese Identitäten für gebrochenlineare Transformationen

$$\frac{d}{d\tau} \Phi_M(\tau) = \frac{\det(M)}{(c\tau + d)^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(M\tau) = \frac{\det(M)}{(c\tau + d)^2} \mathrm{Im}(\tau)$$

Mit diesem Wissen folgt

$$\begin{aligned} \frac{|(M\gamma(z))'|}{\mathrm{Im}(M\gamma(z))} &= \frac{|\Phi'_M(\gamma(z))(\gamma(z))'|}{\mathrm{Im}(\gamma(z)) \frac{\det(M)}{|(c\gamma(z)+d)|^2}} \\ &= \frac{\frac{\det(M)}{|(c\gamma(z)+d)|^2} |\gamma(z)'|}{\mathrm{Im}(\gamma(z)) \frac{\det(M)}{|(c\gamma(z)+d)|^2}} \\ &= \frac{\gamma'(z)}{\mathrm{Im}(\gamma(z))}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das nächste Lemma.

(4.4) Lemma

Für jedes $M \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ ist

$$L(M\gamma) = L(\gamma).$$

Beweis

Um die Behauptung zu beweisen, genügt es die gerade gezeigte Identität einzusetzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} L(M\gamma) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|M\gamma'(\xi)|}{\mathrm{Im}(M\gamma(\xi))} d\xi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\gamma'(\xi)|}{\mathrm{Im}(\gamma(\xi))} d\xi \\ &= L(\gamma). \end{aligned} \quad \square$$

(4.5) Definition

Für $z, w \in \mathbb{H}$ wird

$$|z; w|_h := \inf\{L(\gamma); \gamma \text{ Weg in } \mathbb{H} \text{ von } z \text{ nach } w\}$$

der \mathbb{H} -Abstand oder der hyperbolischen Abstand von z und w genannt.

(4.6) Lemma

Der hyperbolische Abstand von z und w definiert eine Metrik auf \mathbb{H} , die \mathbb{H} -Metrik oder hyperbolische Metrik. Die so definierte Metrik besitzt folgende Invarianzeigenschaft

$$|Mz, Mw|_h = |z, w|_h \text{ für } M \in \text{SL}(2; \mathbb{R}).$$

Beweis

Die Invarianzeigenschaft folgt sofort mit (4.4), denn mit $L(\gamma) = L(M\gamma)$ gilt

$$\begin{aligned} |Mx, My|_h &= \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } Mx \text{ nach } My\} \\ &= \inf\{L(M^{-1}\gamma), \gamma \text{ Weg von } Mx \text{ nach } My\} \\ &= \inf\{L(\tilde{\gamma}), \tilde{\gamma} \text{ Weg von } x \text{ nach } y\} \\ &= |x, y|_h. \end{aligned}$$

Nun wird gezeigt, dass es sich bei dem hyperbolischen Abstand um eine Metrik handelt. Dazu werden die folgenden Punkte bewiesen:

- 1 $|x, y|_h \geq 0$
- 2 $|x, y|_h = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 3 $|x, y|_h \leq |x, z|_h + |z, y|_h$
- 4 $|x, y|_h = |y, x|_h$

Zu 1): Für $x \neq y$ existiert mit Satz (3.9) ein $M \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$ mit $Mx = i$ und $My = \lambda i$, $\lambda > 1$. Mit der Invarianzeigenschaft gilt dann

$$|x, y|_h = |Mx, My|_h = |i, \lambda i|_h > 0.$$

Denn im nächsten Satz wird gezeigt, dass $|i, \lambda i|_h = \log(\lambda)$ und da $\lambda > 1$ ist, ist dies größer Null. Der Fall $x = y$ wird in Punkt 2) bewiesen.

Zu 2): Aus 1) folgt sofort, dass für $x \neq y$ der hyperbolische Abstand $|x, y|_h > 0$ ist. Es genügt also zu zeigen, dass $|x, x|_h = 0$. Dies ist erfüllt, da für den Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$; $\tau \mapsto x$ gilt,

$$|x, x|_h = \int_0^1 \overbrace{\frac{|\gamma'(\zeta)|}{\text{Im}\gamma(\zeta)}}{=0} d\zeta = 0.$$

Zu 3): Es gilt

$$\begin{aligned}
 |x, y|_h &= \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } y\} \\
 &\leq \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } y \text{ und geht durch den Punkt } z\} \\
 &= \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } z \text{ und von } z \text{ nach } y\} \\
 &= \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } z\} + \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } z \text{ nach } y\} \\
 &= |x, z|_h + |z, y|_h.
 \end{aligned}$$

Bleibt noch Punkt 4) zu zeigen:

Zunächst wird dazu eine Zwischenrechnung bewiesen. Dazu sei γ ein Weg von x nach y , das heißt $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$, dann ist $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, $t \mapsto \gamma(b + (a - b)t)$ der Rückweg von y nach x . Dann gilt mit Substitution von $s = b + (a - t)$.

$$\begin{aligned}
 L(\gamma^-) &= \int_a^b \frac{|(\gamma^-)'(t)|}{\operatorname{Im} \gamma^-(t)} dt \\
 &= \int_a^b \frac{|\gamma'(b + (a - t))|}{\operatorname{Im} \gamma(b + (a - t))} dt \\
 &= \int_b^a - \frac{|\gamma'(s)|}{\operatorname{Im} \gamma(s)} ds \\
 &= \int_a^b \frac{|\gamma'(s)|}{\operatorname{Im} \gamma(s)} ds \\
 &= L(\gamma).
 \end{aligned}$$

Damit erhält man 4), wenn man in (*) das gerade gezeigte einsetzt, wie folgt

$$\begin{aligned}
 |x, y|_h &= \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } x \text{ nach } y\} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ Weg von } y \text{ nach } x\} \\
 &= |y, x|_h.
 \end{aligned}$$

□

Wegen der genannten Invarianzeigenschaft heißt diese Metrik auch die invariante Metrik. Für den weiteren Verlauf benötigen wir die folgende Proposition.

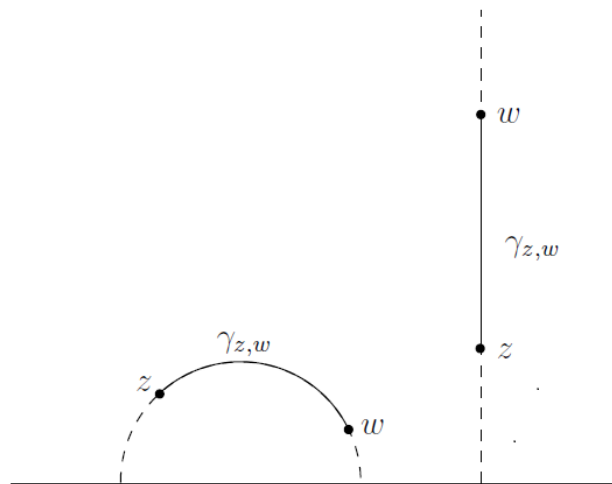
(4.7) Proposition

Zu zwei verschiedenen Punkten $z, w \in \mathbb{H}$ gibt es genau einen Orthogonalkreis durch z und w .

Beweis

Nach (3.9) und (4.6) genügt es die Behauptung für die Punkte $z = i$ und $w = i\lambda, \lambda > 1$ zu beweisen. Denn für alle $z, w \in \mathbb{H}$ existiert ein $M \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ mit $Mz = i$ und $Mw = \lambda i$. In diesem Fall ist die Halbgerade $\{iy : y > 0\}$ der einzige Orthogonalkreis durch die beiden Punkte.

□

Abbildung 1: Orthogonalkreise in \mathbb{H}

Im Folgenden bezeichne $\gamma_{z,w}$ den Orthogonalkreis von z nach w . Dieser ist in der \mathbb{H} -Metrik die kürzeste Verbindung zwischen z und w . Damit entsprechen die Orthogonalkreisbögen den Strecken in der euklidischen Geometrie.

(4.8) Satz

- Für $z, w \in \mathbb{H}$ gilt $|z, w|_h = L(\gamma_{z,w})$ und $\gamma_{z,w}$ ist bis auf Umparameterisierung der einzige Weg in \mathbb{H} mit dieser Eigenschaft.
- Es gilt $|i, \lambda i|_h = \log \lambda, \lambda > 1$.

Beweis

Sei $z \neq w$. Dann sei M nach (3.9) mit $Mz = i$ und $Mw = \lambda i, \lambda > 1$. Dann folgt $M\gamma_{z,w} = \gamma_{i,\lambda i}$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$|i, \lambda i|_h = L(\gamma_{i,\lambda i}) = \int_1^\lambda \frac{1}{\xi} d\xi = \log \lambda.$$

Dabei gilt $L(\gamma_{i,\lambda i}) = \int_1^\lambda \frac{1}{\xi} d\xi = \log \lambda$ mit $\gamma_{i,\lambda i} : [1, \lambda] \rightarrow \mathbb{H}$, $t \mapsto it$, denn

$$\begin{aligned} L(\gamma_{i,\lambda i}) &= \int_1^\lambda \frac{|\gamma'_{i,\lambda i}(t)|}{\operatorname{Im} \gamma_{i,\lambda i}(t)} dt \\ &= \int_1^\lambda \frac{|i|}{t} dt \\ &= \int_1^\lambda \frac{1}{t} dt = \log \lambda. \end{aligned}$$

Somit belbt noch $|i, \lambda i|_h = L(\gamma_{i,\lambda i})$ zu zeigen. Dazu sei γ ein Weg in \mathbb{H} , der i und λi verbindet, mit Parameterdarstellung $\gamma = \gamma(\xi)$, $\alpha \leq \xi \leq \beta$ und $\gamma(\alpha) = i$, $\gamma(\beta) = \lambda i$. Dann gilt mit $\gamma(\xi) = x(\xi) + iy(\xi)$

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(\xi)|}{\operatorname{Im} \gamma(\xi)} d\xi \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(\xi)|}{y(\xi)} d\xi \\ &\stackrel{1)}{\geq} \int_\alpha^\beta \frac{|y'(\xi)|}{y(\xi)} d\xi \\ &\stackrel{2)}{\geq} \left| \int_\alpha^\beta \frac{y'(\xi)}{y(\xi)} d\xi \right| \\ &= |[\log y(\xi)]_\alpha^\beta| \\ &= \log(\lambda) \\ &= L(\gamma_{i,\lambda i}). \end{aligned}$$

Das bedeutet $L(\gamma) \geq \log(\lambda) = L(\gamma_{i,\lambda i})$ für alle Wege die i und λi verbinden. Folglich gilt $|i, \lambda i|_h = \log(\lambda)$. Zuletzt ist noch zu zeigen, dass $\gamma_{i,\lambda i}$ der einzige Weg mit \mathbb{H} -Länge $\log(\lambda)$ ist, der i und λi verbindet. Dazu betrachtet man die gerade gezeigte Abschätzung und zeigt, dass die Gleichheit nur für $\gamma_{i,\lambda i}$ gilt. Bei der Ungleichung 1) gilt die Gleichheit genau dann, wenn $x' = 0$ gilt. Das heißt, dass der Weg nur senkrecht verlaufen kann. Dabei kann sich die Richtung nicht ändern, da sonst bei Ungleichung 2) nicht die Gleichheit gilt. Damit folgt aber $y' \geq 0$ für fast alle ξ . Damit ist $\gamma_{i,\lambda i}$, bis auf Umparameterisierung, der einzige Weg γ mit $L(\gamma) = \log(\lambda)$.

□

— Explizite Formeln für den \mathbb{H} -Abstand —

Es seien $z, w \in \mathbb{H}$, dann definiert das Doppelverhältnis

$$D(z, w) := \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|.$$

Für alle $M \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$ gilt dann mit [1], (XI(1.1))

$$\begin{aligned} D(Mz, Mw) &= \left| \frac{Mz - Mw}{Mz - M\bar{w}} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{\det(M)}{(cz+d)(cw+d)}(z-w)}{\frac{\det(M)}{(cz+d)(c\bar{w}+d)}(z-\bar{w})} \right| \\ &= \left| \underbrace{\frac{(cz+d)(c\bar{w}+d)}{(cz+d)(cw+d)}}_{=1} \right| \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right| \\ &= D(z, w). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned} D(i, \lambda i) &= \left| \frac{i - i\lambda}{i + i\lambda} \right| \\ &= \left| \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right| \\ &= \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}. \end{aligned}$$

Mit (3.9) existiert für alle $z, w \in \mathbb{H}$ ein $M \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{R})$, sodass

$$D(z, w) = D(Mz, Mw) = D(i, \lambda i) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \in [0, 1).$$

Folglich gilt

$$0 \leq D(z, w) < 1.$$

Mithilfe des Doppelverhältnisses ist es nun möglich eine explizite Formel für den \mathbb{H} -Abstand anzugeben.

(4.9) Proposition

Für alle $z, w \in \mathbb{H}$ gilt

$$|z, w|_h = \log \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$$

Beweis

Mit (3.9) darf wieder von $z = i$ und $w = \lambda i$ mit $\lambda > 1$ ausgegangen werden. Es ist bekannt, dass $|i, \lambda i|_h = \log \lambda$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1 + D(i, \lambda i)}{1 - D(i, \lambda i)}\right) &= \log\left(\frac{1 + \frac{\lambda-1}{\lambda+1}}{1 - \frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right) \\ &= \log\left(\frac{\frac{\lambda+1+\lambda-1}{\lambda+1}}{\frac{\lambda+1-\lambda+1}{\lambda+1}}\right) \\ &= \log\left(\frac{2\lambda}{2}\right) \\ &= \log \lambda. \end{aligned} \quad \square$$

Die Invarianz-Beziehung des hyperbolischen Abstandes lässt sich nun noch verschärfen.

(4.10) Satz

Für zwei Punktpaare (z, w) und (z', w') in $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ sind äquivalent:

- i) $|z, w|_h = |z', w'|_h$
- ii) $D(z, w) = D(z', w')$
- iii) Es gibt ein $M \in \text{SL}(2; \mathbb{R})$ mit $Mz = z'$ und $Mw = w'$.

Beweis

i) \Rightarrow ii)

Wie gerade gezeigt wurde, gilt $|z, w|_h = \log \frac{1+D(z,w)}{1-D(z,w)}$. Demnach folgt aus $|z, w|_h = |z', w'|_h$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)}\right) &= \log\left(\frac{1 + D(z', w')}{1 - D(z', w')}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} &= \frac{1 + D(z', w')}{1 - D(z', w')} \\ \Leftrightarrow (1 + D(z, w))(1 - D(z', w')) &= (1 + D(z', w'))(1 - D(z, w)) \\ \Leftrightarrow 1 + D(z, w) - D(z', w') - D(z, w)D(z', w') &= 1 - D(z, w) + D(z', w') - D(z, w)D(z', w') \\ \Leftrightarrow 2D(z, w) - 2D(z', w') &= 0 \\ \Leftrightarrow D(z, w) &= D(z', w'). \end{aligned}$$

ii) \Rightarrow i)

Nach Voraussetzung gilt $D(z, w) = D(z', w')$ und somit folgt sofort

$$|z, w|_h = \log \left(\frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} \right) = \log \left(\frac{1 + D(z', w')}{1 - D(z', w')} \right) = |z', w'|_h.$$

i) \Leftrightarrow iii)

Mit Satz (3.9) existiert zu $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ ein $M \in SL(2; \mathbb{R})$ mit

$$M\tau = i \text{ und } M\tau' = \lambda i, \lambda > 1.$$

Somit existieren zu $z, w \in \mathbb{H}$ ein \tilde{M} und ein \tilde{M}' mit

$$\begin{aligned} \tilde{M}z &= i \text{ und } \tilde{M}w = \lambda i \text{ sowie} \\ \tilde{M}'z &= i \text{ und } \tilde{M}'w = \lambda' i. \end{aligned}$$

Da außerdem $|\tilde{M}z, \tilde{M}w|_h = |z, w|_h$ gilt, reicht es, die Behauptung für $z = z' = i$, $w = \lambda i$ und $w' = \lambda' i$ mit $\lambda, \lambda' > 1$ zu zeigen. Es gilt, mit $|z, w|_h = |z', w'|_h$,

$$|z, w|_h = |\tilde{M}z, \tilde{M}w|_h = |i, \lambda i|_h = |z', w'|_h = |\tilde{M}'z', \tilde{M}'w'|_h = |i, \lambda' i|_h$$

Da bekanntlich $|i, \mu i|_h = \log \mu$, folgt daraus $\log \lambda = \log \lambda'$ und somit $\lambda = \lambda'$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} \tilde{M}z &= i = \tilde{M}'z' \text{ und} \\ \tilde{M}w &= \lambda i = \tilde{M}'w' \\ \Rightarrow \tilde{M}'^{-1}\tilde{M}z &= z' \text{ und} \\ \Rightarrow \tilde{M}'^{-1}\tilde{M}w &= w'. \end{aligned}$$

Damit folgt iii) aus i) mit $M = \tilde{M}'^{-1}\tilde{M}$. Die Rückrichtung folgt aus der Invarianzeigenschaft der hyperbolischen Metrik. \square

Die oben bewiesene Proposition liefert uns noch ein weiteres Ergebnis.

(4.11) Proposition

Jedes Kompaktum \mathcal{K} von \mathbb{H} ist enthalten in einer \mathbb{H} -Kreisscheibe mit dem \mathbb{H} -Mittelpunkt i

$$\mathcal{D}_{i,r} := \{z \in \mathbb{H}; |z, i|_h \leq r\}, \quad r > 0.$$

Beweis

Nach der Proposition (4.9) ist die Abbildung $z \mapsto |z, i|_h = \log \frac{|z+i|+|z-i|}{|z+i|-|z-i|}$ stetig und nimmt somit auf jedem Kompaktum \mathcal{K} ihr Maximum r an. Somit ist \mathcal{K} in $\mathcal{D}_{i,r}$ enthalten. \square

(4.12) Definition

Es wird

$$\mathcal{K}_{z,r} := \{w \in \mathbb{H}; |z, w|_h = r\} \text{ mit } z \in \mathbb{H} \text{ und } r > 0$$

ein \mathbb{H} -Kreis mit \mathbb{H} -Mittelpunkt z und \mathbb{H} -Radius r genannt.

Mit dem gerade gezeigten Satz (4.10) folgt

$$\begin{aligned} M\mathcal{K}_{z,r} &:= \{Mw; w \in \mathcal{K}_{z,r}\} \\ &= \{Mw; |z, w|_h = r\} \\ &\stackrel{(4.10)}{=} \{Mw; |Mz, Mw|_h = r\} \\ &= \mathcal{K}_{Mz,r}. \end{aligned}$$

(4.13) Lemma

Jeder \mathbb{H} -Kreis ist ein euklidischer Kreis in \mathbb{H} und umgekehrt. Für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ ist $w = u + iv \in \mathcal{K}_{z,r}, r > 0$ gleichwertig mit

$$(u - x)^2 + \left(v - \frac{1 + s^2}{1 - s^2}y\right)^2 = \left(\frac{2sy}{1 - s^2}\right)^2, \quad s = \frac{e^r - 1}{e^r + 1}.$$

Beweis

Zunächst ist $w \in \mathcal{K}_{z,r}$ mit $D(z, w) = s$ gleichbedeutend, da

$$\begin{aligned} |z, w|_h = r &\Leftrightarrow \log \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} = r \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + D(z, w)}{1 - D(z, w)} = e^r \\ &\Leftrightarrow 1 + D(z, w) = e^r(1 - D(z, w)) \\ &\Leftrightarrow D(z, w)(1 + e^r) = e^r - 1 \\ &\Leftrightarrow D(z, w) = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = s. \end{aligned}$$

Dabei gilt zudem die folgende Äquivalenz

$$s = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} \Leftrightarrow r = \log\left(\frac{1 + s}{1 - s}\right).$$

Nun ist es möglich zu zeigen, dass ein \mathbb{H} -Kreis äquivalent zu einem euklidischen Kreis in \mathbb{H} ist.

$$\begin{aligned}
D(z, w) &= s \\
\Leftrightarrow \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} &= s \\
\Leftrightarrow |z - w| &= s|z - \bar{w}| \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} &= s\sqrt{(x - u)^2 + (y + v)^2} \\
\Leftrightarrow (x - u)^2 + (y - v)^2 &= s^2[(x - u)^2 + (y + v)^2] \\
\Leftrightarrow (1 - s^2)(x - u)^2 + (y - v)^2 &= s^2(y + v)^2 \\
\Leftrightarrow (x - u)^2 + \frac{(y - v)^2}{1 - s^2} &= \frac{s^2(y + v)^2}{1 - s^2} \\
\Leftrightarrow (x - u)^2 + \frac{(y - v)^2}{1 - s^2} - \frac{s^2(y + v)^2}{1 - s^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow (x - u)^2 + \frac{y^2 - s^2y^2 - 2yv + 2s^2yv + v^2 - s^2v^2}{1 - s^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow (x - u)^2 + v^2 - 2v\frac{1 + s^2}{1 - s^2}y + y^2 + \left(\frac{(1 + s^2)y}{1 - s^2}\right)^2 &= \left(\frac{(1 + s^2)y}{1 - s^2}\right)^2 - y^2\frac{(1 - s^2)^2}{(1 - s^2)^2} \\
\Leftrightarrow (x - u)^2 + \left(v - \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2}\right)y\right)^2 &= \left(\frac{2sy}{1 - s^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Damit ist genau dann $w \in \mathcal{K}_{z, \tilde{r}}$, wenn

$$|z, w|_h = r \Leftrightarrow (u - x)^2 + \left(v - \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2}\right)y\right)^2 = \left(\frac{2sy}{1 - s^2}\right)^2.$$

Dabei liegt der euklidische Kreis komplett in \mathbb{H} , da der Radius $\frac{2sy}{1 - s^2}$ kleiner ist als die y -Koordinate des Kreismittelpunktes $\frac{1 + s^2}{1 - s^2}y$, da mit $s < 1$ gilt, dass $2sy < (1 + s^2)y$. Somit ist gezeigt, dass jeder \mathbb{H} -Kreis ein komplett in \mathbb{H} gelegener euklidischer Kreis ist. Nun wird von einem euklidischen Kreis mit Mittelpunkt $a + ib$ und Radius $0 < \rho < b$ ausgegangen. Dann sei s so gewählt, dass gilt

$$\frac{2s}{1 + s^2} = \frac{\rho}{b} < 1 \text{ und wähle } z = a + i\frac{1 - s^2}{1 + s^2}b.$$

Die Eindeutigkeit von $0 < s < 1$ gilt, da

$$\begin{aligned} \frac{2s}{1+s^2} &= \frac{\rho}{b} \\ \Leftrightarrow s^2 - 2s\frac{b}{\rho} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow s_{1/2} &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - \rho^2}}{\rho} \end{aligned}$$

mit pq-Formel. Dabei gilt da $\rho < b$, dass $\sqrt{b^2 - \rho^2}$ und $s_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - \rho^2}}{\rho} < 1$.

Zunächst wird $s_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - \rho^2}}{\rho} < 1$ betrachtet. Das führt allerdings zu einem Widerspruch zu $\rho < b$, denn es gilt

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{b + \sqrt{b^2 - \rho^2}}{\rho} < 1 \\ \Leftrightarrow b + \sqrt{b^2 - \rho^2} &< \rho \\ \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{b^2 - \rho^2}}_{>0} &< \underbrace{\rho - b}_{<0}. \end{aligned}$$

Also gilt $s = s_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - \rho^2}}{\rho} < 1$. Durch Einsetzen von $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$ ergibt sich mit $\rho = \frac{\rho}{b}b$

$$(u - a)^2 + (v - b)^2 = \left(\frac{2s}{1+s^2}b \right)^2.$$

Erweitert man die rechte Seite mit $\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)$ erhält man

$$(u - a)^2 + (v - b)^2 = \left(\frac{2s}{1-s^2} \left(\frac{1-s^2}{1+s^2} \right) b \right)^2.$$

Durch analoges Rückwärtsrechnen der obigen Rechnung ergibt sich die Behauptung. \square

Literatur

- [1] A. Krieg: Funktionentheorie 1. Skript, RWTH Aachen 2010.
- [2] A. Krieg: Funktionentheorie 2. Skript, RWTH Aachen 2012.
- [3] M. Koecher, A. Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen, 2.Auflage.