Fagnano-Integral und Weierstraß'sche σ-Funktion

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie II, 07.01.2013

Jonas Gallenkämper

Ziel dieses Seminarbeitrags ist, das FAGNANO-Integral zu berechnen und dessen Zusammenhang zu speziellen Gittern, sowie weitere entsprechende Resultate zu erarbeiten. Weiter wird eine Einführung der WEIERSTRASSschen σ-Funktion vorgenommen, die in den folgenden Vorträgen eine zentrale Rolle spielen wird.
Die Ausarbeitung richtet sich nach dem Werk "Elliptische Funktionen und Modulformen" von MAX KOECHER und ALOYS KRIEG [1].

§ 1 Bekannte Definitionen

Wir werden zunächst zwei bekannte Definitionen der vergangenen Vorlesungen wiederholen.
(1.1) Definition (Gamma-Funktion)
Sei $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, dann ist die *Gamma-Funktion* wie folgt definiert:

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

◇

Diese ist wohldefiniert, wie wir in der Funktionentheorie I bereits gesehen haben.

Stets sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω.

Damit erinnern wir an die
(1.2) Definition (Weierstraß'sche $\wp$-Funktion)
Wir definieren zu Ω

$$\wp(z) \;:=\; \wp_\Omega(z) \;:=\; z^{-2} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \Big((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\Big)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. ◇

Die Reihe konvergiert auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$, das keine Gitterpunkte enthält, absolut gleichmäßig (vergleiche [3] X.(3.4)).

§2 Das Fagnano-Integral

Den Ursprung des FAGNANO-Integrals findet man in der folgenden Fragestellung: Wie ist es möglich,

$$\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{p(t)}}$$

zu berechnen, wobei p ein reelles Polynom dritten oder vierten Grades sei.
In der Analysis II haben wir diese Fragestellung bereits für Polynome von erstem und zweitem Grad mit rationalen, trigonometrischen, hyperbolischen Funktionen und der Exponentialfunktion gelöst, wie zum Beispiel

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \sinh^{-1}(x).$$

FAGNANOS Integral ist nun wie folgt definiert:

(2.1) Definition (Fagnano-Integral)
Für $x \in [0,1]$ sei

$$F(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

◇

— $p(t) = 1 - t^4$ —

Zur Berechnung des FAGNANO-Integrals beginnen wir mit dem Spezialfall $F(1)$ in der

(2.2) Proposition
Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

◇

Beweis
Wir beginnen mit der Wohldefiniertheit des mittleren Integrals und zeigen dann die beiden Gleichungen.
Es gilt $1 - t^4 = (1-t)(1+t+t^2+t^3) \geq 1 - t \geq 0$ für alle $t \in [0,1]$. Wir schätzen ab:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2\sqrt{1-t}\Big|_0^1 = 2,$$

also konvergiert das Integral nach dem CAUCHY-Kriterium.
Für die erste Gleichung betrachten wir die Substitution $x = t^{-2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} &= \int_\infty^1 -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{-2}}}\,dx \\ &= \int_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{1-x^{-2}}\sqrt{x^3}} \\ &= \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x}}.\end{aligned}$$

Zum Beweis der zweiten Gleichung beginnen wir rechts mit

$$\begin{aligned}\Gamma(1/4)^2 &= \int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}} e^{-x}\,dx \cdot \int_0^\infty y^{-\frac{3}{4}} e^{-y}\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (xy)^{-\frac{3}{4}} e^{-(x+y)}\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} (xy)^{-\frac{3}{4}} e^{-(x+y)}\,d\lambda,\end{aligned}$$

wobei wir FUBINI im letzten Schritt anwenden. Nun nutzen wir die Transformationsformel für Kreise, welche aus der Analysis III bekannt ist. Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$\Psi : (0,\infty) \times (0,\pi/2) \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ (r,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} r^2\cos^2(\phi) \\ r^2\sin^2(\phi)\end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$D\Psi = \begin{pmatrix} 2r\cos^2(\phi) & -2r^2\sin(\phi)\cos(\phi) \\ 2r\sin^2(\phi) & 2r^2\sin(\phi)\cos(\phi)\end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}|\det(D\Psi)| &= |2r^3\cos^2(\phi)\sin(2\phi) + 2r^3\sin^2(\phi)\sin(2\phi)| \\ &= |2r^3\sin(2\phi)(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi))| \\ &= 2r^3\sin(2\phi),\end{aligned}$$

wobei wir $\sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{1}{2}\sin(2\phi)$ und $\sin(2\phi) > 0$ für $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ genutzt haben.
Nun wollen wir uns wieder unserem Integral zuwenden:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} (xy)^{-\frac{3}{4}} e^{-(x+y)}\, d\lambda \\ &= \int\limits_{(0,\infty)\times(0,\frac{\pi}{2})} (r^4\cos^2(\phi)\sin^2(\phi))^{-\frac{3}{4}} e^{-r^2(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi))} 2r^3\sin(2\phi)\, d\lambda \\ &= \int\limits_{(0,\infty)\times(0,\frac{\pi}{2})} e^{-r^2} \frac{2r^3\sin(2\phi)}{r^3(\frac{1}{4}\sin^2(2\phi))^{\frac{3}{4}}}\, d\lambda \\ &= \int\limits_{(0,\infty)\times(0,\frac{\pi}{2})} e^{-r^2} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\sin(2\phi)}}\, d\lambda \\ &= 4\sqrt{2}\int\limits_0^\infty e^{-r^2} dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\phi)}}\, d\phi \\ &= 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\phi)}}\, d\phi,\end{aligned}$$

wobei wir

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}\, dr = \sqrt{\pi} \qquad\qquad \text{(siehe [5], Seite 334)}$$

zusammen mit $e^{-r^2} = e^{-(-r)^2}$ für das erste Integral genutzt haben, sowie $\sin(2(\frac{\pi}{4}+t)) = \sin(2(\frac{\pi}{4}-t))$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ für das zweite Integral.
Wir nehmen eine letzte Substitution

$$t = \sqrt{\sin(2\phi)}$$

vor, also

$$\phi = \frac{\arcsin(t^2)}{2} \quad \text{und} \quad d\phi = \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}dt$$

und erhalten

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\phi)}}\, d\phi = \int_0^1 \frac{1}{t} \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\, dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\, dt.$$

Insgesamt gilt also

$$\Gamma(1/4)^2 = 4\sqrt{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\, dt,$$

was äquivalent zur Behauptung ist. □

Das gewonnene Wissen möchten wir nutzen, um die EISENSTEIN-Reihen zum Gitter $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ zu berechnen.

(2.3) Satz
Es gilt für $\Omega := \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$

$$g_2(\Omega) = \frac{\Gamma(1/4)^8}{16\pi^2}, \quad \text{sowie} \quad g_3(\Omega) = 0.$$ ◇

Erinnerung: Für ein Gitter Ω in $\mathbb{C}$ mit Basis (ω_1, ω_2) haben wir in der Funktionentheorie II g_2 und g_3 wie folgt definiert:

$$g_2 := g_2((\omega_1, \omega_2)) := g_2(\Omega) := 60 \cdot G_4(\Omega) := 60 \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-4} \quad \text{und}$$
$$g_3 := g_3((\omega_1, \omega_2)) := g_3(\Omega) := 140 \cdot G_6(\Omega) := 140 \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-6}.$$

Weiter werden wir folgende Ergebnisse der Funktionentheorie II nutzen.
Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gelten

$$g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4} g_2(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6} g_3(\Omega) \tag{1}$$

(vergleiche [3], Seite 245).
Den Zusammenhang zur $\wp$-Funktion zeigt die Differentialgleichung aus [3] X.(3.6):

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{2}$$

Zudem waren g_2, g_3 für $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ wie folgt definiert:

$$g_2(\tau) := g_2((\tau, 1)) = \frac{(2\pi)^4}{12}\left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m)\, e^{2\pi i m\tau}\right) \quad \text{und} \tag{3}$$

$$g_3(\tau) := g_3((\tau, 1)) = \frac{(2\pi)^6}{216}\left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m)\, e^{2\pi i m\tau}\right) \tag{4}$$

mit der RIEMANNschen σ-Funktion

$$\sigma_s(m) := \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|m}} d^s, \quad s \in \mathbb{R}$$

(vergleiche [3], Seite 249).
Hier ist Vorsicht geboten, letztere nicht mit der WEIERSTRASSschen σ-Funktion aus dem 3. Paragrafen zu verwechseln.
Für unsere speziellen Gitter $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und später $\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ stimmen die Definitionen der g_2 und g_3 mit $\tau = i$, beziehungsweise $\tau = \rho$ überein.
Weiter seien für $k = 1, 2, 3$ und einer Basis (ω_1, ω_2)

$$e_k := \wp(\omega_k/2) \quad \text{mit} \quad w_3 := \omega_1 + \omega_2$$

definiert.
Kommen wir nun zum

Beweis
Mit $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z} = i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ und (1) folgt sofort

$$g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = g_3(i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})) = i^{-6} g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = -g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}),$$

also $g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = 0$.
Mit (3) erhalten wir

$$g_2(\Omega) = g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = g_2(i) = \frac{(2\pi)^4}{12}\left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m)\, e^{-2\pi m}\right) > 0.$$

Damit existiert nun nach (1) ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $g_2(\lambda\Omega) = 4$ gilt.
Weiterhin gilt mit (1) $g_3(\lambda\Omega) = 0$.
Im nächsten Schritt bringen wir das Polynom $4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ (vergleiche (2.2)) mit e_1, e_2 und e_3 in Zusammenhang. [3] X.(3.13) liefert uns

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3),$$

und da $e_1 < e_3 < e_2$ nach [3], Seite 245 gilt, erhalten wir $e_1 = -1$, $\wp(\lambda/2) = e_2 = 1$ und $e_3 = 0$. Weiter ist nach [3] X.(3.22) $\wp$ reell und $\wp' < 0$ auf $(0, \lambda/2)$, also $\wp$ streng monoton. Eben dieses Resultat aus [3] besagt zudem $\lim_{x\downarrow 0} \wp(x) = \infty$.
Mit der Substitution $x = \wp(t)$ berechnen wir nun

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x}} &= \int_{\lambda/2}^0 \frac{\wp'(t)}{\sqrt{4\wp^3(t)-4\wp(t)}}\,dt \\ &= \int_0^{\lambda/2} \frac{-\wp'(t)}{\sqrt{4\wp^3(t)-4\wp(t)}}\,dt \\ &= \int_0^{\lambda/2} \sqrt{\frac{\wp'^2(t)}{4\wp^3(t)-4\wp(t)}}\,dt \\ &= \int_0^{\lambda/2} dt \\ &= \frac{\lambda}{2},\end{aligned} \tag{5}$$

wobei wir noch $\wp'^2(t) = 4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3$ verwendet haben (vergleiche (2)).
Nun liefert uns Proposition (2.2)

$$\lambda = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}}$$

und mit (1) folgt

$$g_2(\Omega) = \lambda^4 g_2(\lambda\Omega) = \frac{\Gamma(1/4)^8}{16\pi^2}.$$ □

Nun können wir das Fagnano-Integral, wie in (2.1) beschrieben, berechnen.

(2.4) Korollar
Für $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und $0 < R \leq 1$ existiert ein $\xi \in (0, 1/2]$ mit

$$\int_0^R \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}}\xi,$$

wobei ξ eindeutig durch

$$\wp_\Omega(\xi) = \frac{\Gamma(1/4)^4}{8\pi R^2} \tag{6}$$

bestimmt ist. ◇

Beweis
Sei
$$\lambda := \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}},$$
dann gilt $g_2(\Omega) = 4\lambda^4$ und weiterhin $g_3(\Omega) = 0$ nach Satz (2.3).
Mit der Differentialgleichung $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ (siehe (2)) und $\wp := \wp_\Omega$ folgt wie in (5) im Beweis zuvor

$$\lambda\xi = \lambda \int_0^\xi \sqrt{\frac{\wp'^2(s)}{4\wp^3(s) - g_2\wp(s) - g_3}}\, ds = \lambda \int_\xi^0 \frac{\wp'(s)}{\sqrt{4\wp^3(s) - 4\lambda^4\wp(s)}}\, ds.$$

Nun substituieren wir $x = \wp(s)$ und danach $x = \lambda^2/t^2$ und erhalten mit (6)

$$\lambda\xi = \lambda \int_{\lambda^2/R^2}^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 4\lambda^4 x}} = \lambda \int_0^R \frac{2\lambda^2}{t^3\sqrt{4\frac{\lambda^6}{t^6} - 4\frac{\lambda^2}{t^2}\lambda^4}}\, dt = \int_0^R \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Die eindeutige Wahl in (6) ist nach [3] X.(3.22) möglich, denn demnach wird $(0, 1/2]$ mit $\wp_\Omega$ bijektiv auf $[\lambda^2, \infty)$ abgebildet. Dazu beachtet man $\wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \lambda^{-2}\wp_\Omega(z)$ (vergleiche [3], Seite 245) und somit $\wp_\Omega(1/2) = \lambda^2\wp_{\lambda\Omega}(\lambda/2) = \lambda^2$ mit $\wp_{\lambda\Omega}(\lambda/2) = 1$ aus dem letzten Beweis. □

— $p(t) = 1 - t^6$ —

Wir möchten im Weiteren die entsprechenden Ergebnisse über Sechseckgitter erarbeiten. Dazu starten wir analog zur Proposition (2.2) mit dem

(2.5) Lemma
Es gilt
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^6}} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1/6)}{6\cdot\Gamma(2/3)}.$$
◇

Beweis
Die Existenz der Integrale folgt mit der gleichen Begründung wie in der Proposition (2.2) für $1 - t^6 = (1-t)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t^1) \geq 1 - t \geq 0$.
Zur ersten Gleichung genügt erneut die Substitution $x = t^{-2}$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^6}} = \int_\infty^1 -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{-3}}}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4}}.$$

Auch die zweite Gleichung wird mit demselben Verfahren wie in der Proposition (2.2) gezeigt. Wir starten mit

$$\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(1/6) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{-1/2} y^{-5/6}\,dx\,dy.$$

Nun nutzen wir den Diffeomorphismus

$$\Psi : (0,\infty)\times(0,\pi/2) \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ (r,\phi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos^2(\phi) \\ r\sin^2(\phi) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$D\Psi = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) & -2r\cos(\phi)\sin(\phi) \\ \sin^2(\phi) & 2r\cos(\phi)\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\det(D\Psi)| &= |2r\cos^3(\phi)\sin(\phi) + 2r\sin^3(\phi)\cos(\phi)| \\ &= |2r\cos(\phi)\sin(\phi)(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi))| \\ &= 2r\cos(\phi)\sin(\phi), \end{aligned}$$

da alle Faktoren positiv sind.
Angewendet auf das Integral erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2)\cdot\Gamma(1/6) &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r}(r\cos^2(\phi))^{-1/2}(r\sin^2(\phi))^{-5/6} 2r\cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi\,dr \\ &= 2\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r} r^{-1/3}\sin^{-2/3}(\phi)\,d\phi\,dr \\ &= 2\int_0^\infty r^{-1/3} e^{-r}\,dr \int_0^1 3t^{-2}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}\,dt \\ &= 6\cdot\Gamma(2/3)\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^6}}, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $t = sin^{2/3}(\phi)$ im vorletzten Schritt genutzt haben. Nun erinnern wir uns noch an $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (siehe [2] VIII.(3.8)) und erhalten die Behauptung. □

Zur Vorbereitung der EISENSTEIN-Reihen zum Sechseckgitter $\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ brauchen wir noch eine Abschätzung zwischen der σ- und der ζ-Funktion.
Erinnerung: Die RIEMANNsche ζ-Funktion wird wie folgt definiert:

$$\zeta(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s, \quad \text{für } s > 1.$$

Auch hier ist wieder wichtig, diese nicht mit der WEIERSTRASSschen ζ-Funktion aus dem 3. Paragrafen zu verwechseln.

(2.6) Hilfssatz
Seien $s > 1$ und $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$m \leq \sigma_s(m) \leq \zeta(s)m^s. \qquad \diamond$$

Beweis
Es gilt

$$\frac{\sigma_s(m)}{m^s} = \sum_{d|m} \left(\frac{d}{m}\right)^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s = \zeta(s),$$

denn es existiert zu jedem d genau ein n mit $\frac{d}{m} = \frac{1}{n}$.
Die erste Abschätzung ist klar. □

Mit dieser Vorbereitung werden wir den folgenden Satz beweisen.

(2.7) Satz
Sei $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Es gilt

$$g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{und} \quad g_3(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \frac{4\pi^3 \cdot \Gamma(1/6)^6}{3^6 \cdot \Gamma(2/3)^6}. \qquad \diamond$$

Beweis
Mit $\rho^2 = \rho - 1$ und (1) erhalten wir

$$g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}(\rho - 1)) = g_2(\rho(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z})) = \rho^{-4} \cdot g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}),$$

also $g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = 0$, da $\rho^{-4} \neq 1$ gilt.
Aus (4) folgt

$$g_3(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = g_3(\rho) = \frac{(2\pi)^6}{216}\left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m)\, e^{\pi i m(1+i\sqrt{3})}\right)$$
$$= \frac{(2\pi)^6}{216}\left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, \sigma_5(m)\, e^{-\pi m\sqrt{3}}\right).$$

Wir bemerken, dass $\sigma_5(m)\, e^{-\pi m\sqrt{3}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, denn es gilt mit Hilfssatz (2.6)

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_5(m+1)\, e^{-\pi(m+1)\sqrt{3}}}{\sigma_5(m)\, e^{-\pi m\sqrt{3}}} &\leq \left(\frac{m+1}{m}\right)^5 \cdot \zeta(5) \cdot e^{-\pi\sqrt{3}} \\ &\leq 2^5 \cdot \zeta(4) \cdot e^{-\pi\sqrt{3}} \\ &= 2^5 \cdot \frac{\pi^4}{90} \cdot e^{-\pi\sqrt{3}} \\ &< 1,\end{aligned}$$

wobei $\zeta(4) = \pi^4/90$ aus [2] VI.(4.6) bekannt ist. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt, dass g_3 positiv ist.
Mir der Identität in (1) folgern wir die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, sodass das Gitter $\Omega := \lambda(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z})$ sowohl $g_3(\Omega) = 4$ als auch weiterhin natürlich $g_2(\Omega) = 0$ erfüllt.
Im nächsten Schritt betrachten wir das Polynom $4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$. Es ist $x = 1$ die einzige reelle Nullstelle. Zudem ist $\wp_\Omega(x) = \wp(x)$ nach [3] X.(3.19) für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$ reell. Damit gilt $e_2 = \wp(\lambda/2) = 1$ nach [3] X.(3.13).
Weiter folgt $\lim_{x\downarrow 0} \wp(x) = \infty$. Dazu betrachtet man wie im Beweis von [3] X.(3.22) für $\epsilon > 0$ klein genug $0 < t < \epsilon$ und erhält $\wp'(t) = -2t^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon) < 0$, also muss der Pol von $\wp$ positiv sein.
Da nach [3] X.(3.19) sowohl $\wp$ als auch $\wp'$ reell auf $(0, \lambda/2]$ sind und nach [3] X.(2.9) $\lambda/2$ die einzige Nullstelle von $\wp'$ auf $(0, \lambda/2]$ ist, ist $\wp$ streng monoton fallend und es gilt mit der Substitution $x = \wp(t)$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4}} = \int_{\frac{\lambda}{2}}^0 \frac{\wp'(t)}{\sqrt{4\wp^3(t)-4}}\, dt = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} dt = \frac{\lambda}{2}.$$

Dabei schließen wir den vorletzten Schritt wieder mit der Differtialgleichung aus (2) $\wp'^2(t) = 4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3$ und $\wp'(t)|_{(0,\lambda/2)} < 0$ wie bereits im Beweis von

Satz (2.3) in der Rechnung (5).
Mit Lemma (2.5) folgt nun

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1/6)}{3 \cdot \Gamma(2/3)}$$

und somit aus (1)

$$g_3(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \lambda^6 \cdot g_3(\Omega) = \frac{4\pi^3 \cdot \Gamma(1/6)^6}{3^6 \cdot \Gamma(2/3)^6}. \qquad \square$$

§ 3 Weierstraß'sche σ-Funktion

Wir werden nun die WEIERSTRASSsche σ-Funktion und ihre logarithmische Ableitung, die WEIERSTRASSsche ζ-Funktion einführen. Diese werden in den folgenden Vorträgen weiter behandelt. Unser zentrales Ergebnis wird die LEGENDRE-Relation sein.

(3.1) Definition (Weierstraß'sche σ-Funktion)
Zu einem Gitter Ω in $\mathbb{C}$ definieren wir das Produkt

$$\sigma(z) := \sigma(z;\Omega) := z \cdot \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \cdot e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}.$$

◇

Zur Wohldefiniertheit und den ersten Eigenschaften folgt eine

(3.2) Bemerkung

(a) Das Produkt der σ-Funktion ist auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$ absolut gleichmäßig konvergent.

(b) σ ist eine ganze Funktion mit Nullstellen erster Ordnung genau in $\omega \in \Omega$.

(c) σ ist ungerade. ◇

Beweis
Wir nummerieren die $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ nach ihrem Betrag aufsteigend und erhalten so die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ mit $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty$. Dabei spielt die Reihenfolge für mehrere ω gleichen Betrags keine Rolle.
Der WEIERSTRASSsche Produktsatz (siehe [2] VIII.(1.10)) liefert uns die Ergebnisse (a) und (b), wobei man in dessen Beweis schauen sollte. Dort wird die absolut gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum aus den in (a) gezeigten Voraussetzungen allgemein gezeigt.

(a) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^3 = R^3 \cdot \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{|a_k|^3} < \infty$$

für alle $R > 0$ nach dem Konvergenzlemma ([3] X.(1.10)). Mit dem ersten Teil des Beweises des WEIERSTRASSschen Produktsatzes folgt die Behauptung.

(b) Mit E_q aus [2], Seite 163 und speziell

$$E_2\left(\frac{z}{\omega}\right) = \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \cdot e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}$$

folgt die Behauptung aus dem WEIERSTRASSschen Produktsatz.

(c) Da mit ω auch $-\omega$ ganz Ω durchläuft, folgt bereits, dass $\sigma(z) = -\sigma(-z)$ gilt.□

Als nächstes folgt die angekündigte logarithmische Ableitung von σ in der

(3.3) Definition (Weierstraß'sche ζ-Funktion)
Wir definieren

$$\zeta(z) := \zeta(z;\Omega) := \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

für $z \notin \Omega$ (vergleiche [2] VIII.(2.12)). ◇

Auch hier halten wir eine kurze Bemerkung fest.

(3.4) Bemerkung
Die Reihe in ζ konvergiert auf jedem Kompaktum, das keine Gitterpunkt enthält, absolut gleichmäßig. Zudem ist auch ζ ungerade. ◇

Beweis
Sei $\mathcal{K}$ ein solches Kompaktum in $\mathbb{C}$, sowie

$$C := \max_{z\in\mathcal{K}} |z|, \quad \text{und} \quad c := \min_{\substack{z\in\mathcal{K}\\ \omega\in\Omega\setminus\{0\}}} \left|\frac{z}{\omega} - 1\right|.$$

Da $\mathcal{K}$ keine Gitterpunkte enthält, gilt $c \neq 0$.
Weiter ist

$$\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} = \frac{z^2}{\omega^2(z-\omega)}$$

und somit für alle $z \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right| \\
\leq &|C|^2 \cdot \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{\omega^3}\right| \left|\frac{1}{\frac{z}{\omega} - 1}\right| \\
\leq &\frac{|C|^2}{|c|} \cdot \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{\omega^3}\right|.
\end{aligned}$$

Aus dem Konvergenzlemma (siehe [3] X.(1.10)) folgt die Behauptung.
Analog zur vorherigen Bemerkung erhält man, dass ζ ungerade ist. □

Bevor wir zur LEGENDRE-Relation kommen, noch eine vorbereitende

(3.5) Bemerkung

Es gilt

$$\zeta' = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' = -\wp.$$

Weiter ist $\eta : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\eta(\omega) := \eta(\omega;\Omega) := \zeta(z+\omega) - \zeta(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \tag{7}$$

ein von z unabhängiger Gruppenhomomorphismus. $\diamond$

Beweis

Wegen (3.4) erhalten wir für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

$$\begin{aligned}
\zeta'(z) &= \left(\frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)\right)' \\
&= \frac{-1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)' \\
&= \frac{-1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(\frac{-1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right) \\
&\overset{(1.2)}{=} -\wp(z).
\end{aligned}$$

Wegen $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\frac{\partial \eta_z(\omega)}{\partial z} = -\wp(z+w) + \wp(z) = -\wp(z) + \wp(z) = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Also ist die Definition von η von z unabhängig.
Weiter gilt mit $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ auch $z+\omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ für $\omega \in \Omega$ und somit

$$\begin{aligned}
\eta(\omega) + \eta(\omega') =& \zeta((z+\omega')+\omega) - \zeta((z+\omega')) + \zeta(z+\omega') - \zeta(z) \\
=& \zeta(z+(\omega+\omega')) - \zeta(z) \\
=& \eta(\omega+\omega'),
\end{aligned}$$

also haben wir einen Gruppenhomomorphismus. $\square$

(3.6) Satz (Legendre-Relation)

Es gilt für $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$

$$\eta(\omega_2)\cdot\omega_1 - \eta(\omega_1)\cdot\omega_2 = 2\pi i, \quad \text{falls } \operatorname{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0.$$ $\diamond$

Beweis
Zum Beweis werden wir $\zeta(z)$ über den positiv orientierten Rand eines verschobenen Periodenparallelogramms $P := \Diamond(u;\omega_1,\omega_2)$ (vergleiche auch [3], Seite 220) integrieren. Dabei sei u so gewählt, dass 0 im Inneren von P liegt. Wir schließen dann bereits mit dem Residuensatz ([2] VI.(1.5))

$$\int_{\partial P} \zeta(z)\,dz = 2\pi i,$$

da ζ genau in der 0 einen Pol der Ordnung 1 in P hat, denn die Reihe von ζ ist holomorph in P.
Weiter gilt für das positiv orientierte Integral:

$$\begin{aligned}\int_{\partial P} \zeta(z)\,dz &= \int_{u}^{u+\omega_2} \zeta(z)\,dz + \int_{u+\omega_2}^{u+\omega_1+\omega_2} \zeta(z)\,dz + \int_{u+\omega_1+\omega_2}^{u+\omega_1} \zeta(z)\,dz + \int_{u+\omega_1}^{u} \zeta(z)\,dz \\ &= \underbrace{\int_{u}^{u+\omega_2} \zeta(z) - \zeta(z+\omega_1)\,dz}_{\text{1. und 3. Integral}} + \underbrace{\int_{u+\omega_1}^{u} \zeta(z) - \zeta(z+\omega_2)\,dz}_{\text{2. und 4. Integral}} \\ &\overset{(7)}{=} -\eta(\omega_1)\cdot\omega_2 - (\omega_1\cdot(-\eta(\omega_2))),\end{aligned}$$

wobei wir die Integrationsrichtung wegen $\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$ eindeutig festlegen konnten. $\square$

Als eine kleine Erweiterung notieren wir das

(3.7) Korollar
Für $\omega, \omega' \in \Omega$ gilt

$$\eta(\omega)\cdot\omega' - \eta(\omega')\cdot\omega \ \in 2\pi i\mathbb{Z}. \qquad \diamond$$

Beweis
Zu $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit $\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$ wählen wir $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ so, dass $\omega = a\cdot\omega_1 + b\cdot\omega_2$ und $\omega' = a'\cdot\omega_1 + b'\cdot\omega_2$ gilt. Wir benutzen die Homomorphie-Eigenschaft (3.5) und rechnen

$$\begin{aligned} & \eta(\omega)\cdot\omega' - \eta(\omega')\cdot\omega \\ = \ & a\cdot\eta(\omega_1)\cdot\omega' + b\cdot\eta(\omega_2)\cdot\omega' - a'\cdot\eta(\omega_1)\cdot\omega - b'\cdot\eta(\omega_2)\cdot\omega \\ = \ & aa'\cdot\eta(\omega_1)\cdot\omega_1 + ab'\cdot\eta(\omega_1)\cdot\omega_2 + ba'\cdot\eta(\omega_2)\cdot\omega_1 + bb'\cdot\eta(\omega_2)\cdot\omega_2 \\ & - aa'\cdot\eta(\omega_1)\cdot\omega_1 - a'b\cdot\eta(\omega_1)\cdot\omega_2 - b'a\cdot\eta(\omega_2)\cdot\omega_1 - bb'\cdot\eta(\omega_2)\cdot\omega_2 \\ = \ & a'b\cdot(\eta(\omega_2)\cdot\omega_1 - \eta(\omega_1)\cdot\omega_2) + ab'\cdot(\eta(\omega_1)\cdot\omega_2 - \eta(\omega_2)\cdot\omega_1) \\ = \ & a'b\cdot 2\pi i + ab'\cdot(-2\pi i) \ \in 2\pi i\mathbb{Z}\end{aligned}$$

nach der LEGENDRE-Relation (3.6). $\square$

Zum Schluss möchten wir noch die Auswirkungen von Dreh-Streckungen des Gitters auf σ, ζ und η festhalten.

(3.8) Korollar
Seien $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ und Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$, dann gilt:

(a) $\sigma(\lambda z; \lambda\Omega) = \lambda \cdot \sigma(z, \Omega)$,

(b) $\zeta(\lambda z; \lambda\Omega) = \frac{1}{\lambda} \cdot \zeta(z; \Omega)$ und

(c) $\eta(\lambda\omega; \lambda\Omega) = \frac{1}{\lambda} \cdot \eta(\omega; \Omega)$. $\diamond$

Beweis
Zu (a):

$$\begin{aligned}
\sigma(\lambda z; \lambda\Omega) &= \lambda z \cdot \prod_{0 \neq \omega \in \lambda\Omega} \left(1 - \frac{\lambda z}{\omega}\right) \cdot e^{\frac{\lambda z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda z}{\omega}\right)^2} \\
&= \lambda z \cdot \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(1 - \frac{\lambda z}{\lambda\omega}\right) \cdot e^{\frac{\lambda z}{\lambda\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda z}{\lambda\omega}\right)^2} \\
&= \lambda \cdot \sigma(z, \Omega).
\end{aligned}$$

Zu (b):

$$\begin{aligned}
\zeta(\lambda z; \lambda\Omega) &= \frac{1}{\lambda z} + \sum_{\omega \in \lambda\Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\lambda z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{\lambda z}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda z} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\lambda z - \lambda\omega} + \frac{1}{\lambda\omega} + \frac{\lambda z}{\lambda^2\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda z} + \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \zeta(z; \Omega).
\end{aligned}$$

Zu (c):
Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, sodass $\lambda z \notin \Omega$, dann gilt mit (b):

$$\begin{aligned}
\eta(\lambda\omega; \lambda\Omega) &= \zeta(\lambda z + \lambda\omega; \lambda\Omega) - \zeta(\lambda z; \lambda\Omega) \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot (\zeta(z + \omega; \Omega) - \zeta(z; \Omega)) \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \eta(\omega; \Omega).
\end{aligned}$$

$\square$

Hier werden die folgenden Vorträge anknüpfen.

§4 Literatur

Der Vortrag beruht hauptsächlich auf:

[1] MAX KOECHER, ALOYS KRIEG, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Auflage, Springer Berlin, 2007.

Zudem wurden die folgenden Werke zu Rate gezogen:

[2] ALOYS KRIEG, Skript zur Vorlesung Funktionentheorie I, Aachen, 2010;

[3] ALOYS KRIEG, Skript zur Vorlesung Funktionentheorie II, Aachen, 2012;

[4] SERGE LANG, Calculus of Several Variables, 2. Auflage, Springer New York, 1987;

[5] REINHOLD REMMERT, GEORG SCHUMACHER, Funktionentheorie 1, 5. Auflage, Springer Berlin, 2001;

[6] REINHOLD REMMERT, Funktionentheorie 2, 2. Auflage, Springer Berlin, 1994.