Transformationsverhalten der Sigma-Funktion und Existenz sowie Darstellung von elliptischen Funktionen

Stefan Bleß

Seminar zur Funktionentheorie II

07. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Vortrag werden wir uns ausführlich mit der Weierstrass'schen Sigmafunktion auseinandersetzen. Dabei werden wir zunächst ihr Translationsverhalten auf einem Gitter Ω untersuchen, da diese Funktion an sich noch keine elliptische Funktion zum Gitter Ω ist. Anschließend werden wir mit Hilfe der Sigmafunktion die elliptischen Funktionen über Ω etwas näher charakterisieren können. Wir werden einen Existenzsatz herleiten, der für gegebene Null- und Polstellen in einem Periodenparallelogramm eine elliptische Funktion konstruiert. Darüber hinaus werden wir mit Hilfe der Liouville'schen Sätze zeigen, dass alle elliptischen Funktionen, die die gleichen Nullstellen und Pole besitzen, sich nur um eine Konstante unterscheiden können. Somit lassen sich alle elliptischen Funktionen durch die Sigmafunktion darstellen.

Als letzten größeren Abschnitt werden wir dann einen Zusammenhang zur Weierstrass'schen $\wp$-Funktion herstellen. Dabei lernen wir eine alternative Schreibweise der $\wp$-Funktion sowie ihrer Ableitung kennen. Außerdem werden wir eine Art "Wurzel" für eine Funktion finden, die eine elliptische Funktion zum Gitter 2Ω darstellt. Als Abschluss dieser Arbeit werden wir dann die sogenannte Sigma-Relation herleiten.

Die gesamte Ausarbeitung basiert dabei auf den beiden Abschnitten 2 und 3 im §3 des Kapitels I in [2]. Wir werden ebenfalls häufiger nützliche Resultate und Definitionen aus dem Skript [1] verwenden.

2 Grundbegriffe

Bevor wir uns dem eigentlichen Transformationsverhalten der Weierstrass'schen Sigmafunktion widmen, möchte ich zunächst an dieser Stelle die wesentlichen Begriffe aus den bisherigen Vorträgen wiederholen. Dabei sei Ω stets ein Gitter in $\mathbb{C}$ und wir können direkt den wichtigsten Begriff dieser Ausarbeitung definieren:

(2.1) Definition.
Die ganze und ungerade Funktion $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sigma(z) := \sigma(z, \Omega) := z \cdot \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)$$

heißt die **Weierstrass'sche Sigmafunktion**. Sie ist auf jedem Kompaktum von $\mathbb{C}$ absolut gleichmäßig konvergent und besitzt genau an den Stellen $z \in \Omega$ Nullstellen 1. Ordnung. Die logarithmische Ableitung von σ wird als **Weierstrass'sche Zetafunktion** bezeichnet:

$$\zeta(z) := \zeta(z, \Omega) := \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

für $z \notin \Omega$. Dabei ist die Zetafunktion ebenfalls ungerade und auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$, das keinen Gitterpunkt enthält, absolut gleichmäßig konvergent. ◇

Aus dem letzten Vortrag können wir darüber hinaus festhalten:

(2.2) Bemerkung.

a) Es gilt $\zeta' = -\wp$.

b) Die Abbildung $\eta : \Omega \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\eta(\omega) := \eta(\omega, \Omega) := \zeta(z + \omega) - \zeta(z)$$

ist ein von z unabhängiger Gruppenhomomorphismus.

c) Für beliebige $\omega, \omega' \in \Omega$ ist $\eta(\omega) \cdot \omega' - \eta(\omega') \cdot \omega \in 2\pi i\mathbb{Z}$. ◇

3 Transformationsverhalten der Sigmafunktion

Nachdem nun alle nötigen Grundbegriffe bekannt sind, können wir uns in diesem Abschnitt der Ausarbeitung dem Transformationsverhalten der Sigmafunktion widmen. Da σ eine ganze und nicht-konstante Funktion ist, kann σ keine elliptische Funktion zum Gitter Ω sein. Dennoch wollen wir die Sigmafunktion auf ihr Verhalten unter den Translationen $z \mapsto z + \omega$ für $\omega \in \Omega$ untersuchen. Dazu definieren wir die Abbildung $\chi : \Omega \to \{\pm 1\}$ durch

$$\chi(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \omega/2 \in \Omega \\ -1 & \text{, falls } \omega/2 \notin \Omega \end{cases}$$

und erhalten damit den

(3.1) Satz.
Für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sigma(z+\omega) = \chi(\omega) \cdot e^{\eta(\omega)(z+\omega/2)} \cdot \sigma(z). \qquad \diamond$$

Beweis:
Falls $z \in \Omega$ ist, so ist auch $z + \omega \in \Omega$ für alle $\omega \in \Omega$ und somit nach (2.1) dann auch $\sigma(z) = \sigma(z+\omega) = 0$, das heißt die beiden Gleichungsseiten sind 0. Es sei daher $z \notin \Omega$. Die Definition der Zetafunktion liefert dann $\sigma'(z) = \sigma(z) \cdot \zeta(z)$, woraus wiederum

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)}\right) &= \frac{\sigma'(z+\omega)\cdot\sigma(z) - \sigma(z+\omega)\cdot\sigma'(z)}{\sigma(z)^2} \\ &= \frac{\sigma(z+\omega)\cdot\zeta(z+\omega) - \sigma(z+\omega)\cdot\zeta(z)}{\sigma(z)} \\ &= \frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)}\cdot\eta(\omega) \end{aligned}$$

für alle $\omega \in \Omega$ folgt. Wir erhalten nun

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)}\cdot e^{-\eta(\omega)z}\right) = \frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)}\cdot e^{-\eta(\omega)z}(\eta(\omega)-\eta(\omega)) = 0,$$

das heißt

$$\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)}\cdot e^{-\eta(\omega)z}$$

und damit insbesondere

$$\psi(\omega) := \frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)}\cdot e^{-\eta(\omega)(z+\omega/2)}$$

hängen nicht von z ab. Da σ ungerade ist, liefert $z = -\frac{w}{2}$ die Gleichung

$$\psi(\omega) = \frac{\sigma(\omega/2)}{\sigma(-\omega/2)} = -1, \tag{1}$$

falls $\frac{\omega}{2} \notin \Omega$ ist. Daher betrachten wir nun den Fall $0 \neq \frac{\omega}{2} \in \Omega$. Da Ω diskret ist, existiert eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $\omega' := 2^{-n}\omega \in \Omega$ und $\frac{1}{2}\omega' = 2^{-n-1}\omega \notin \Omega$. Ist $z \notin \Omega$, so ist auch $z' := z + \omega \notin \Omega$ und weil η ein Homomorphismus nach (2.2) ist, gilt

$$\begin{aligned}
\psi(2\omega) &= \frac{\sigma(z+2\omega)}{\sigma(z)} \cdot e^{-\eta(2\omega)(z+\omega)} \\
&= \frac{\sigma(z+2\omega)}{\sigma(z+\omega)} \cdot \frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)} \cdot e^{-2\eta(\omega)(z+\omega)} \\
&= \frac{\sigma(z'+\omega)}{\sigma(z')} \cdot e^{-\eta(\omega)(z'+\omega/2)} \cdot \frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)} \cdot e^{-\eta(\omega)(z+\omega/2)} \\
&= \psi^2(\omega),
\end{aligned}$$

da ψ nicht von z abhängt. Damit ist $\psi(\omega) = \psi(2^n\omega') = (\psi(\omega'))^{2^n} = 1$ nach Gleichung (1). Insgesamt folgt nun $\psi = \chi$ und damit die Behauptung, da diese Gleichheit ebenfalls für $z = \omega = 0$ leicht einzusehen ist. □

Als direkte Folgerung aus diesem Resultat erhalten wir das

(3.2) Korollar.
Setzt man $f(z) := \frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z-b)}$ für $a, b \in \mathbb{C}$, so gilt für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z \notin b + \Omega$:

$$f(z+\omega) = e^{\eta(\omega)(b-a)} \cdot f(z). \qquad \diamond$$

Beweis:
Es seien $a, b \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
f(z+\omega) &= \frac{\sigma(z-a+\omega)}{\sigma(z-b+\omega)} \\
&= \frac{\chi(\omega) \cdot e^{\eta(\omega)(z-a+\omega/2)} \cdot \sigma(z-a)}{\chi(\omega) \cdot e^{\eta(\omega)(z-b+\omega/2)} \cdot \sigma(z-b)} \\
&= e^{\eta(\omega)(b-a)} \cdot \frac{\sigma(z-a)}{\sigma(z-b)} \\
&= e^{\eta(\omega)(b-a)} \cdot f(z)
\end{aligned}$$

für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $z \notin b + \Omega$. □

4 Existenz und Darstellung von elliptischen Funktionen

Schließlich werden wir in diesem Abschnitt dieser Ausarbeitung mit Hilfe der Weierstrass'schen Sigmafunktion die Existenz und Darstellung von elliptischen Funktionen untersuchen. Dazu sei f eine nicht-konstante elliptische Funktion zum Gitter Ω und P ein Periodenparallelogramm.

Wiederholt man die Null- und Polstellen gemäß ihren Vielfachheiten, so besagt einer der Liouville'schen Sätze X(2.5) aus [1], dass es $a_1, \ldots, a_r \in P$ sowie $b_1, \ldots, b_r \in P$ gibt, so dass $a_1, \ldots, a_r$ genau die Nullstellen und $b_1, \ldots, b_r$ genau die Pole von f sind. Ferner liefert der Liouville'sche Satz X(2.6) aus [1] die Abelsche Relation

$$a_1 + \ldots + a_r \equiv b_1 + \ldots + b_r \pmod{\Omega}.$$

Wir wollen nun untersuchen, ob dieses notwendige Kriterium auch hinreichend sein kann mit dem

(4.1) Satz (Existenzsatz).
Es seien $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_r$ zwei endliche Folgen in $\mathbb{C}$, für welche die Mengen $\{a_1 + \Omega, \ldots, a_r + \Omega\}$ und $\{b_1 + \Omega, \ldots, b_r + \Omega\}$ disjunkt sind und für die

$$\omega_0 := b_1 + \ldots + b_r - (a_1 + \ldots + a_r) \in \Omega$$

ist. Dann ist

$$f(z) := e^{-\eta(\omega_0)z} \cdot \frac{\sigma(z-a_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-b_r)}$$

eine elliptische Funktion, die genau an den Stellen $a_1 + \Omega, \ldots, a_r + \Omega$ Nullstellen und an den Stellen $b_1 + \Omega, \ldots, b_r + \Omega$ Pole jeweils mit Vielfachheit gemäß Wiederholung besitzt. ◇

Beweis:
Nach (2.1) ist die Sigmafunktion eine ganze Funktion, das heißt das Produkt von Sigmafunktionen und der Exponentialfunktion ist wieder ganz. Da $\sigma(z)$ genau Nullstellen in $z \in \Omega$ besitzt, ist f insbesondere meromorph und besitzt nur die angegebenen Null- und Polstellen. Es bleibt somit $f(z+\omega) = f(z)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C}$ zu zeigen.

Mit Korollar (3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z+\omega) &= e^{-\eta(\omega_0)(z+\omega)} \cdot e^{\eta(\omega)(b_1-a_1)} \cdot \frac{\sigma(z-a_1)}{\sigma(z-b_1)} \cdot \ldots \cdot e^{\eta(\omega)(b_r-a_r)} \cdot \frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)} \\ &= e^{-\eta(\omega_0)(z+\omega)+\eta(\omega)((b_1-a_1)+\ldots+(b_r-a_r))} \cdot \frac{\sigma(z-a_1)}{\sigma(z-b_1)} \cdot \ldots \cdot \frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)} \\ &= f(z) \cdot e^{-\eta(\omega_0)\omega+\eta(\omega)\omega_0}. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung (2.2) ist $\eta(\omega)\omega_0 - \eta(\omega_0)\omega \in 2\pi i\mathbb{Z}$ und dadurch $f(z+\omega) = f(z)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C}$. □

Die Liouville'schen Sätze besagen außerdem, dass eine ganze elliptische Funktion konstant ist. Dividiert man nun zwei elliptische Funktionen, die die gleichen Nullstellen und Pole besitzen, so ist das Resultat eine ganze elliptische Funktion und somit konstant. Somit unterscheiden sich zwei elliptische Funktionen mit den gleichen Null- und Polstellen nur um einen konstanten Faktor und wir können aus dem Existenzsatz (4.1) folgern:

(4.2) Satz (Darstellungssatz).
Ist f eine elliptische Funktion zum Gitter Ω und hat f in einem Periodenparallelogramm P Nullstellen bei $a_1, \ldots, a_r$ und Pole an den Stellen $b_1, \ldots, b_r$ (gezählt mit Vielfachheiten), dann gibt es eine Konstante C und ein

$$\omega_0 := b_1 + \ldots + b_r - a_1 - \ldots - a_r \in \Omega$$

mit der Eigenschaft

$$f(z) = C \cdot \frac{\sigma(z-a_1-\omega_0) \cdot \sigma(z-a_2) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-b_r)}. \qquad \diamond$$

Beweis:
Die Abelsche Relation als Folgerung der Liouville'schen Sätze liefert die Existenz von

$$\omega_0 := b_1 + \ldots + b_r - a_1 - \ldots - a_r \in \Omega,$$

so dass mit dem Existenzsatz (4.1) die Existenz der elliptischen Funktion

$$g(z) := e^{-\eta(\omega_0)z} \cdot \frac{\sigma(z-a_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-b_r)},$$

die genau die gleichen Null- und Polstellen wie die Funktion f hat, folgt. Die Liouville'schen Sätze besagen nun weiterhin, dass sich f und g nur um eine Konstante unterscheiden können, das heißt es gilt

$$f(z) = D \cdot g(z)$$

für ein $D \in \mathbb{C}$. Da $\omega_0 \in \Omega$ ist, ist auch $-\omega_o \in \Omega$ und es folgt mit Satz (3.1)

$$\sigma(z - a_1 - \omega_0) = \chi(-\omega_0) \cdot e^{\eta(-\omega_0)(z-\omega_0/2)} \cdot \sigma(z - a_1).$$

Dabei ist η als Gruppenhomomorphismus ungerade und wir erhalten mit

$$C := D \cdot \frac{1}{\chi(-\omega_0) \cdot e^{\eta(\omega_0)\cdot\omega_0/2}}$$

und weil $\chi(-\omega_0) \cdot e^{\eta(\omega_0)\cdot\omega_0/2} \neq 0$ ist:

$$\begin{aligned}
f(z) &= D \cdot \frac{\chi(-\omega_0) \cdot e^{\eta(\omega_0)\cdot\omega_0/2}}{\chi(-\omega_0) \cdot e^{\eta(\omega_0)\cdot\omega_0/2}} \cdot g(z) \\
&= C \cdot \chi(-\omega_0) \cdot e^{\eta(\omega_0)\cdot\omega_0/2} \cdot e^{-\eta(\omega_0)z} \cdot \frac{\sigma(z-a_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-b_r)} \\
&= C \cdot \chi(-\omega_0) \cdot e^{-\eta(\omega_0)(z-\omega_0/2)} \cdot \frac{\sigma(z-a_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-b_r)} \\
&= C \cdot \frac{\sigma(z-a_1-\omega_0) \cdot \sigma(z-a_2) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(z-b_r)}.
\end{aligned}$$

□

5 Die Weierstrass'sche $\wp$-Funktion

Den Darstellungssatz für elliptische Funktionen können wir ebenso auf das bereits bekannte Beispiel aus [1], die Weierstrass'sche $\wp$-Funktion, anwenden. Zunächst werden wir eine Darstellung der $\wp$-Funktion mittels der Sigmafunktion herleiten mit dem

(5.1) Korollar.
Für $z, \omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt

$$\wp(z) - \wp(\omega) = -\frac{\sigma(z+\omega) \cdot \sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z) \cdot \sigma^2(\omega)}.$$

◇

Beweis:
Die beiden Gleichungsseiten sind auf jeder Umgebung, die keinen Gitterpunkt enthält, stetig. Da die Gitterpunkte diskret in $\mathbb{C}$ liegen, finden wir um jedes $\omega \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ mit $2\omega \in \Omega$ eine Umgebung, auf der die beiden Gleichungsseiten stetig sind und daher auch an der Stelle ω diese Gleichheit gelten muss. Deswegen können wir ohne Einschränkung $2\omega \notin \Omega$ annehmen.

Es sei nun ω fest. Dann hat die Weierstrass'sche $\wp$-Funktion wie bereits aus [1] bekannt (vgl. Satz X(3.4)) genau Pole 2. Ordnung in den Gitterpunkten aus Ω, und damit ebenso $\wp(z) - \wp(\omega)$ in $z \in 0 + \Omega$ einen Pol zweiter Ordnung. Außerdem ist $2\omega \notin \Omega$, so dass $\omega \neq \frac{\omega_i}{2}$ für $1 \leq i \leq 3$ ist, wobei durch (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω gegeben und $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ sei. Da $\wp(z) - \wp(\frac{\omega_i}{2})$ für alle $1 \leq i \leq 3$ nach Korollar X(2.11) aus [1] genau eine doppelte Nullstelle in $z = \frac{\omega_i}{2}$ hat, ist somit auch $\wp(\omega)$ verschieden von $\wp(\frac{\omega_i}{2})$ für $1 \leq i \leq 3$. Es folgt daher mit Korollar X(2.11)(b) aus [1], dass $\wp(z) - \wp(\omega)$ zwei einfache Nullstellen in $z \in \omega + \Omega$ und $z \in -\omega + \Omega$ hat, da $\wp$ eine gerade Funktion und $\omega \not\equiv -\omega \mod \Omega$ ist.

Wir können nun die elliptische Funktion $\wp(z) - \wp(\omega)$ nach dem Darstellungssatz (4.2) auch schreiben als

$$\wp(z) - \wp(\omega) = D \cdot \frac{\sigma(z+\omega) \cdot \sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z)}$$

mit einer Konstanten $D \in \mathbb{C}$. Da $\omega \notin \Omega$ ist, ist nach (2.1) auch $\sigma(\omega) \neq 0$, so dass wir $C := D \cdot \sigma^2(\omega)$ definieren können und erhalten dadurch

$$\wp(z) - \wp(\omega) = C \cdot \frac{\sigma(z+\omega) \cdot \sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z) \cdot \sigma^2(\omega)}. \tag{2}$$

Wir werden nun ein paar Grenzwertbetrachtungen durchführen, um die Konstante C bestimmen zu können. Diese Grenzwertbetrachtungen finden dabei stets auf Umgebungen statt, die keine Gitterpunkte aus Ω außer dem betrachteten Grenzwert enthalten. Dazu betrachten wir zunächst

$$\lim_{z \to 0} \left(z^2 \cdot \frac{\sigma(z+\omega) \cdot \sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z) \cdot \sigma^2(\omega)} \right).$$

Das Multiplizieren von $\frac{1}{\sigma(z)}$ mit z hebt bei der Produktdarstellung der Sigmafunktion den Vorfaktor weg, so dass nur das absolut lokal gleichmäßige Produkt über alle von 0 verschiedenen Gitterpunkte betrachtet werden muss. Bei diesem Produkt kann jedoch der Limes reingezogen werden und die einzelnen Faktoren konvergieren dann gegen 1. Dadurch konvergiert ebenfalls das gesamte Produkt gegen 1.

Der Zähler des rechten Terms konvergiert ferner gegen $-\sigma^2(\omega)$, da σ nach (2.1) ungerade ist, und es folgt

$$\lim_{z \to 0} \left(z^2 \cdot \frac{\sigma(z+\omega) \cdot \sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z) \cdot \sigma^2(\omega)} \right) = -1.$$

Widmen wir uns nun dem Grenzwert

$$\lim_{z \to 0} (z^2 \cdot (\wp(z) - \wp(\omega))).$$

Die Laurent-Reihe von $\wp(z)$ bei $z = 0$ hat nach Satz X(2.7) und Satz X(2.8) aus [1] die Form

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + \ldots,$$

und damit in $z = 0$ wie bereits mehrfach erwähnt einen Pol zweiter Ordnung. Somit folgt

$$\lim_{z \to 0} (z^2 \cdot \wp(z)) = \lim_{z \to 0} (1 + z^4 \cdot (a_2 + \ldots)) = 1$$

und daraus wiederum

$$\lim_{z \to 0} (z^2 \cdot (\wp(z) - \wp(\omega))) = 1.$$

Diese beiden Grenzwerte besagen nun, dass die Gleichung (2) nur dann richtig sein kann, wenn $C = -1$ ist, und wir erhalten schließlich

$$\wp(z) - \wp(\omega) = -\frac{\sigma(z+\omega) \cdot \sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z) \cdot \sigma^2(\omega)}. \qquad \square$$

— *Die Ableitung der $\wp$-Funktion* —

Da wir durch geschicktes Ausnutzen des Differenzenquotienten aus dem grade betrachteten Korollar die Ableitung der Weierstrass'schen $\wp$-Funktion herleiten können, betrachten wir nun das

(5.2) Korollar.
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt

$$\wp'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)} \qquad \diamond$$

Beweis:
Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Ferner sei $\omega \in \mathbb{C}$ in einer Umgebung von z, die keinen Gitterpunkt von Ω enthält, das heißt insbesondere, dass $\omega \notin \Omega$ ist. Daher gilt nach Korollar (5.1)

$$\wp(z) - \wp(\omega) = -\frac{\sigma(z+\omega)\cdot\sigma(z-\omega)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(\omega)}.$$

Daraus folgt wiederum für $z \neq \omega$

$$\begin{aligned}\frac{\wp(z)-\wp(\omega)}{z-\omega} &= -\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(\omega)}\cdot\frac{\sigma(z-\omega)}{z-\omega}\\ &= -\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(\omega)}\cdot\prod_{0\neq\omega'\in\Omega}\left(1-\frac{(z-\omega)}{\omega'}\right)\cdot e^{(z-\omega)/\omega'+1/2\cdot((z-\omega)/\omega')^2}.\end{aligned}$$

Da das rechte Produkt nach (2.1) lokal gleichmäßig konvergent ist, können wir den Grenzüberganz $\omega \to z$ in das Produkt ziehen. Somit multiplizieren wir dort nur noch über Einsen, so dass das Produkt bei diesem Grenzübergang 1 wird. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{\omega\to z} -\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(\omega)}\cdot\frac{\sigma(z-\omega)}{z-\omega} = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)}$$

und

$$\lim_{\omega\to z}\frac{\wp(z)-\wp(\omega)}{z-w} = \wp'(z),$$

also

$$\wp'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^4(z)}. \qquad \square$$

Somit haben wir eine alternative Darstellung der Ableitung der Weierstrass'schen ℘-Funktion durch die Sigmafunktion gefunden. Wir wissen bereits aus [1], dass $\wp'$ genau an den Gitterpunkten aus Ω Pole dritter Ordnung besitzt (vgl. Satz X(2.8) aus [1]). Dieses Resultat können wir nun auch direkt aus Korollar (5.2) herleiten:

Die Sigmafunktion besitzt genau dann eine Nullstelle in z, wenn $z \in \Omega$ ist. Ferner ist für $z \in \Omega$ auch $2z \in \Omega$, das heißt $\wp'$ hat nach Korollar (5.2) einen Pol der Ordnung 3, da die höhere Ordnung durch $\sigma(2z)$ im Zähler gehoben werden kann. Darüber hinaus liefert die neue Identität aus diesem Korollar: Ist $z \notin \Omega$, aber $2z \in \Omega$, so ist $\sigma(2z) = 0 \neq \sigma(z)$ und damit hat dann $\wp'$ in z eine einfache Nullstelle (vgl. Satz X(2.9) aus [1]).

— *Eine elliptische Funktion zum Gitter* 2Ω —

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die vorherigen Resultate eine Funktion liefern, die das Quadrat einer meromorphen Funktion ist. Diese ist dann zwar keine elliptische Funktion zum Gitter Ω, aber dafür zum Gitter 2Ω. Zunächst erhalten wir eine weitere Folgerung mit dem

(5.3) Korollar.
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ und $\omega \in \Omega$, $\frac{\omega}{2} \notin \Omega$ gilt

$$\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left(e^{\eta(\omega)z/2} \cdot \frac{\sigma(z-\omega/2)}{\sigma(z)\cdot\sigma(\omega/2)}\right)^2. \qquad \diamond$$

Beweis:
Nach Korollar (5.1) gilt

$$\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{\sigma(z+\omega/2)\cdot\sigma(z-\omega/2)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(\omega/2)}.$$

Es ist $\frac{\omega}{2} \notin \Omega$ und somit $\chi(\omega) = -1$. Daher erhalten wir mit Satz (3.1):

$$\begin{aligned}\sigma\left(z+\frac{\omega}{2}\right) &= \sigma\left(z-\frac{\omega}{2}+\omega\right)\\ &= -1\cdot e^{\eta(\omega)(z-\omega/2+\omega/2)}\cdot\sigma\left(z-\frac{\omega}{2}\right)\\ &= -e^{\eta(\omega)z}\cdot\sigma\left(z-\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

Dies können wir in die obige Gleichung einsetzen und erhalten wiederum

$$\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{\eta(\omega)z}\cdot\frac{\sigma^2(z-\omega/2)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(\omega/2)} = \left(e^{\eta(\omega)z/2}\cdot\frac{\sigma(z-\omega/2)}{\sigma(z)\cdot\sigma(\omega/2)}\right)^2. \qquad \square$$

Somit haben wir gerade gezeigt, dass $\wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})$ für $\omega \in \Omega \setminus 2\Omega$ das Quadrat einer meromorphen Funktion ist, und dadurch die Definition

$$\sqrt{\wp(z) - \wp(\omega/2)} := -e^{\eta(\omega)z/2}\cdot\frac{\sigma(z-\omega/2)}{\sigma(z)\cdot\sigma(\omega/2)}$$

für $\frac{\omega}{2} \notin \Omega$ möglich ist. Dabei stellt diese Defintion keine elliptische Funktion zum Gitter Ω, sondern eher zum Gitter 2Ω dar. Dies werden wir nun etwas näher betrachten mit dem

(5.4) Korollar.
Für $\omega_0 \in \Omega \setminus 2\Omega$ ist

$$\sqrt{\wp(z) - \wp(\omega_0/2)} := -e^{\eta(\omega_0)z/2} \cdot \frac{\sigma(z - \omega_0/2)}{\sigma(z) \cdot \sigma(\omega_0/2)}$$

eine elliptische Funktion der Ordnung 4 zum Gitter 2Ω. Dabei sind alle ihre Pole einfach und liegen in Ω und ihre Nullstellen sind ebenfalls alle einfach und liegen in $\frac{\omega_0}{2} + \Omega$. $\diamond$

Beweis:
Wir wissen bereits aus (2.1), dass die Sigmafunktion genau einfache Nullstellen in allen $z \in \Omega$ besitzt. Es ist somit $\sigma(\frac{\omega_0}{2}) \neq 0$ und der Nenner der oben definierten Funktion weist nur einfache Nullstellen in allen $z \in \Omega$ auf. Da diese nicht von $\sigma(z - \frac{\omega_0}{2})$ oder der Exponentialfunktion, die stets ungleich 0 ist, gehoben werden können, liegen also genau in den Gitterpunkten $z \in \Omega$ einfache Pole vor. Analog besitzt ausschließlich der Zähler eine einfache Nullstelle in $\frac{\omega_0}{2} + \Omega$ mit Hilfe des Transformationsverhaltens der Sigmafunktion, so dass die oben definierte Funktion genau einfache Nullstellen in $\frac{\omega_0}{2} + \Omega$ hat.

Widmen wir uns nun dem Translationsverhalten. Mit Korollar (3.2) und $\omega \in \Omega$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{\wp(z+2\omega) - \wp(\omega_0/2)} &= -e^{\eta(\omega_0)(z+2\omega)/2} \cdot \frac{\sigma(z + 2\omega - \omega_0/2)}{\sigma(z+2\omega) \cdot \sigma(\omega_0/2)} \\
&= -e^{\eta(\omega_0)z/2} \cdot \frac{1}{\sigma(\omega_0/2)} \cdot \frac{\sigma(z + 2\omega - \omega_0/2)}{\sigma(z+2\omega)} \cdot e^{\eta(\omega_0)\omega} \\
&= -e^{\eta(\omega_0)z/2} \cdot \frac{1}{\sigma(\omega_0/2)} \cdot e^{-\eta(2\omega)\omega_0/2} \cdot \frac{\sigma(z - \omega_0/2)}{\sigma(z)} \cdot e^{\eta(\omega_0)\omega} \\
&= \sqrt{\wp(z) - \wp(\omega_0/2)} \cdot e^{\eta(\omega_0)\omega - \eta(\omega)\omega_0} \\
&= \sqrt{\wp(z) - \wp(\omega_0/2)},
\end{aligned}$$

da η nach Bemerkung (2.2) ein Gruppenhomomorphismus sowie

$$\eta(\omega_0)\omega - \eta(\omega)\omega_0 \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

ist. Da die definierte Funktion meromorph ist und ihre Pole genau in den Gitterpunkten aus 2Ω liegen, ist sie somit eine elliptische Funktion zum Gitter 2Ω.

Wir betrachten nun ihre Pole in einem Periodenparallelogramm, ohne Einschränkung können wir dies in der Grundmasche des Gitters 2Ω tun. Es sei dazu (ω_1, ω_2)

eine Basis vom Gitter Ω und dadurch $(2\omega_1, 2\omega_2)$ eine Basis vom Gitter 2Ω. Die Pole liegen in den Gitterpunkten des Gitters Ω, das heißt in unserer Grundmasche liegen Pole ausschließlich in 0, ω_1, ω_2 und $\omega_1 + \omega_2$. Somit gibt es insgesamt genau 4 Pole und unsere oben definierte Funktion ist eine elliptische Funktion zum Gitter 2Ω der Ordnung 4. $\square$

— *Eine alternative Darstellung der Diskriminante* —

Wir werden im weiteren Verlauf eine alternative Darstellung der Diskriminante des Gitters Ω herleiten, indem wir die bisherigen Resultat auf die Standardbezeichnungen

$$e_k := \wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$$

für $1 \leq k \leq 3$ und $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$, wobei (ω_1, ω_2) eine Basis des Gitters Ω sei (vgl. Korollar X(2.11) aus [1]), anwenden. Da $\frac{\omega_k}{2} \notin \Omega$ ist, erhalten wir mit Korollar (5.3)

$$\begin{aligned} e_3 - e_1 &= \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \\ &= \left(e^{\eta(\omega_1)\omega_3/4} \cdot \frac{\sigma(\omega_3/2 - \omega_1/2)}{\sigma(\omega_3/2) \cdot \sigma(\omega_1/2)}\right)^2 \\ &= e^{\eta(\omega_1)\omega_3/2} \cdot \left(\frac{\sigma(\omega_2/2)}{\sigma(\omega_3/2) \cdot \sigma(\omega_1/2)}\right)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e_3 - e_2 &= \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \\ &= \left(e^{\eta(\omega_2)\omega_3/4} \cdot \frac{\sigma(\omega_3/2 - \omega_2/2)}{\sigma(\omega_3/2) \cdot \sigma(\omega_2/2)}\right)^2 \\ &= e^{\eta(\omega_2)\omega_3/2} \cdot \left(\frac{\sigma(\omega_1/2)}{\sigma(\omega_3/2) \cdot \sigma(\omega_2/2)}\right)^2 . \end{aligned}$$

Nimmt man zusätzlich Satz (3.1) hinzu, so gilt

$$\begin{aligned} e_2 - e_1 &= \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \\ &= \left(e^{\eta(\omega_1)\omega_2/4} \cdot \frac{\sigma(\omega_2/2 - \omega_1/2)}{\sigma(\omega_2/2) \cdot \sigma(\omega_1/2)}\right)^2 \\ &= \left(e^{\eta(\omega_1)\omega_2/4} \cdot \frac{1}{\chi(\omega_1)} \cdot e^{-\eta(\omega_1)(\omega_2/2 - \omega_1/2 + \omega_1/2)} \cdot \frac{\sigma(\omega_2/2 + \omega_1/2)}{\sigma(\omega_2/2) \cdot \sigma(\omega_1/2)}\right)^2 \\ &= e^{-\eta(\omega_1)\omega_2/2} \cdot \left(\frac{\sigma(\omega_3/2)}{\sigma(\omega_2/2) \cdot \sigma(\omega_1/2)}\right)^2 . \end{aligned}$$

Wir haben somit eine alternative Schreibweise der Diskriminante

$$\Delta := 16 \cdot (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2$$

von Ω mittels der Eta- und Sigmafunktion gefunden.

— *Die Sigma-Relation* —

Als Abschluss dieser Ausarbeitung werden wir nun die sogenannte Sigma-Relation herleiten mit dem

(5.5) Satz (Sigma-Relation).
Für alle $u, v, w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} &\sigma(u+v)\sigma(u-v) \cdot \sigma(z+w)\sigma(z-w) \\ &+ \sigma(v+w)\sigma(v-w) \cdot \sigma(z+u)\sigma(z-u) \\ &+ \sigma(w+u)\sigma(w-u) \cdot \sigma(z+v)\sigma(z-v) = 0. \end{aligned} \qquad \diamond$$

Beweis:
Es gilt allgemein

$$\begin{aligned} &(U-V)(Z-W) + (V-W)(Z-U) + (W-U)(Z-V) \\ &= UZ - UW - VZ + VW + VZ - VU - WZ + WU + WZ - WV - UZ + UV \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da Ω diskret in $\mathbb{C}$ liegt können wir wieder aus Stetigkeitsgründen $u, v, w, z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ annehmen. Definiert man nun $U := \wp(u)$, $V := \wp(v)$, $W := \wp(w)$ und $Z := \wp(z)$, so folgt

$$\begin{aligned} &(\wp(u) - \wp(v))(\wp(z) - \wp(w)) \\ &+ (\wp(v) - \wp(w))(\wp(z) - \wp(u)) \\ &+ (\wp(w) - \wp(u))(\wp(z) - \wp(v)) = 0. \end{aligned}$$

Wir können nun Korollar (5.1) anwenden und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)}\right) \cdot \left(-\frac{\sigma(z+w)\cdot\sigma(z-w)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(w)}\right) \\ &+ \left(-\frac{\sigma(v+w)\cdot\sigma(v-w)}{\sigma^2(v)\cdot\sigma^2(w)}\right) \cdot \left(-\frac{\sigma(z+u)\cdot\sigma(z-u)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(u)}\right) \\ &+ \left(-\frac{\sigma(w+u)\cdot\sigma(w-u)}{\sigma^2(w)\cdot\sigma^2(u)}\right) \cdot \left(-\frac{\sigma(z+v)\cdot\sigma(z-v)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(v)}\right) = 0. \end{aligned}$$

Dies kann man zusammenfassen zu

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)\cdot\sigma(z+w)\sigma(z-w)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)\cdot\sigma^2(w)\cdot\sigma^2(z)}\\ +&\frac{\sigma(v+w)\sigma(v-w)\cdot\sigma(z+u)\sigma(z-u)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)\cdot\sigma^2(w)\cdot\sigma^2(z)}\\ +&\frac{\sigma(w+u)\sigma(w-u)\cdot\sigma(z+v)\sigma(z-v)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)\cdot\sigma^2(w)\cdot\sigma^2(z)}=0\end{aligned}$$

und es folgt nun

$$\begin{aligned}&\sigma(u+v)\sigma(u-v)\cdot\sigma(z+w)\sigma(z-w)\\ +&\,\sigma(v+w)\sigma(v-w)\cdot\sigma(z+u)\sigma(z-u)\\ +&\,\sigma(w+u)\sigma(w-u)\cdot\sigma(z+v)\sigma(z-v)=0,\end{aligned}$$

da $\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)\cdot\sigma^2(w)\cdot\sigma^2(z)\neq 0$ ist. $\square$

Literatur

[1] A. Krieg: Funktionentheorie II. Skript zur Vorlesung, RWTH Aachen 2012.

[2] M. Koecher, A. Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Auflage, Springer 2007