Produktentwicklungen der σ-Funktion und von Δ und deren Anwendung auf die absolute Invariante j

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie II, 7.1.2013

Markus Kohlen

§ 1 Einleitung

Wie der Name schon vermuten lässt ist das Ziel dieses Vortrages Produktentwicklungen herzuleiten. Zuerst werden wir dabei die σ-Funktion zu einem beliebigen Gitter produktentwickeln. Mithilfe dieser Produktentwicklung wird es uns möglich sein, die Diskriminante Δ näher zu untersuchen. Insbesondere werden wir auch von dieser Funktion eine Produktentwicklung angeben. Im letzten Abschnitt werden wir dann die Produktentwicklung von der Diskriminante verwenden, um das bekannte Resultat herzuleiten, dass die absolute Invariante j eine Fourier-Entwicklung mit natürlichen Fourier-Koeffizienten besitzt.

§ 2 Grundlagen

In den vorherigen Seminarvorträgen wurden bereits einige Resultate hergeleitet, auf die wir im Folgenden zurückgreifen werden. Daher seien sie an dieser Stelle noch einmal aufgeführt. Ebenso werden wir in diesem Abschnitt die in dieser Ausarbeitung verwendete Notation einführen.
In dieser Ausarbeitung ist $\Omega = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ ein Gitter, wobei wir uns auf Gitter der Form $\Omega = \tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ mit $\tau \in \mathbb{H}$ beschränken, wobei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene bezeichne. Dann ist die σ-Funktion wie folgt definiert.

(2.1) Definition (vgl. [KK] Kap. 1 § 6.1)
Für alle komplexen Zahlen z ist die σ-Funktion definiert durch

$$\sigma(z) := \sigma(z;\Omega) := z \cdot \prod_{0\neq\omega\in\Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}$$

◇

Des Weiteren benötigen wir einen Gruppenhomomorphismus η, der wie folgt definiert ist.

(2.2) Definition (vgl. [KK] Kap. 1 § 6.1)
Die Abbildung
$$\eta : \Omega \to \mathbb{C}, \omega \mapsto \zeta(z+\omega) - \zeta(z)$$
ist ein Gruppenhomomorphismus, wobei ζ die Weierstrasssche ζ-Funktion bezeichne, welche
$$\zeta(z) := \zeta(z;\Omega) := \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$
erfüllt. ◇

Der Einfachheit halber werden wir folgende abkürzende Notation verwenden.
$$\sigma(z;\tau) := \sigma(z;\Omega)$$
und
$$\eta(\omega;\tau) := \eta(\omega;\Omega)$$
Des Weiteren bezeichne $\eta := \eta(1;\tau) := \eta(1;\Omega)$.

Für η haben wir folgende wichtige Relation.

(2.3) Satz (Legendre-Relation, vgl. [KK] Kap. 1 §6.1)
Es gilt
$$\eta(\omega_2)\omega_1 - \eta(\omega_1)\omega_2 = 2\pi i, \text{falls } \operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0.$$
◇

In der oben eingeführten Notation lautet die Legendre-Relation:
$$\eta\tau - \eta(\tau;\tau) = 2\pi i$$
Dabei ist zu beachten, dass aufgrund der Wahl für $\omega_1 = \tau$ und $\omega_2 = 1$ die Bedingung $\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_2) = \operatorname{Im}(\tau) > 0$ erfüllt ist.

Das erste Resultat ist eine Formel für die Berechnung von σ.

(2.4) Satz (vgl. [KK] Kap. 1 § 6.2)
Für alle ω aus Ω und alle z aus $\mathbb{C}$ gilt:
$$\sigma(z+\omega) = \chi(\omega)e^{\eta(\omega;\tau)(z+\omega/2)}\sigma(z).$$
◇

Verwendet man die aus Funktionentheorie II bekannten Abkürzungen $e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$ und $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$, so wurden bereits folgende Gleichungen hergeleitet.

(2.5) Lemma (vgl. [KK] Kap. 1 § 6.3 (5))
Es gelten folgende Gleichungen, wenn man $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ setzt.

$$e_2 - e_1 = e^{-\eta(\omega_1;\tau)\frac{\omega_2}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\omega_3}{2})}{\sigma(\frac{\omega_1}{2})\sigma(\frac{\omega_2}{2})}\right)^2$$

$$e_3 - e_1 = e^{\eta(\omega_1;\tau)\frac{\omega_3}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\omega_2}{2})}{\sigma(\frac{\omega_1}{2})\sigma(\frac{\omega_3}{2})}\right)^2$$

$$e_3 - e_2 = e^{\eta(\omega_2;\tau)\frac{\omega_3}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\omega_1}{2})}{\sigma(\frac{\omega_2}{2})\sigma(\frac{\omega_3}{2})}\right)^2$$

◇

Als nächstes benötigen wir für einige Identitäten die Eisensteinreihen.

(2.6) Definition (vgl. [KK] Kap. 1 § 1.9/ § 3.3)
Die Eisensteinreihen zum Gitter Ω sind definiert durch

$$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \frac{1}{\omega^k}$$

für ganze Zahlen k mit $k \geq 3$. Weiterhin bezeichnet man $g_2 := 60G_4$ und $g_3 := 140G_6$ als die Weierstrass-Invarianten eines Gitters. ◇

(2.7) Korollar ([KK] Kap.1 § 3.4 Korollar C)
Es gilt

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0$$

◇

(2.8) Lemma (vgl. [KK] §4.3)
Die Weierstraß-Invariante $g_2(\tau)$ hat eine Fourier-Entwicklung der Form

$$g_2(\tau) = \frac{(2\pi)^4}{12}(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n \tau}).$$

Dabei ist $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$. ◇

§3 Produktentwicklung der σ- Funktion

In diesem Abschnitt werden wir eine Produktentwicklung der bereits zuvor eingeführten σ -Funktion herleiten. Dazu bedienen wir uns folgender abkürzender Schreibweise.

$$q := \exp(2\pi i\tau), \tau \in \mathbb{H}\,;\, w := \exp(2\pi iz), z \in \mathbb{C}$$

Speziell sei

$$\sqrt{q} := e^{\pi i\tau}; \sqrt{w} := e^{\pi iz}.$$

Um eine Produktentwicklung herzuleiten betrachten wir folgende Funktion.

(3.1) Lemma
Zu einem fest gewählten τ aus der oberen Halbebene sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := e^{-\eta\frac{z^2}{2}} \cdot \sqrt{w} \cdot \sigma(z;\tau).$$

Dann erfüllt f die folgenden Relationen:

1. $f(z+1) = f(z)$
2. $f(z+\tau) = -\frac{1}{w}f(z)$ ◇

Beweis
Nach Satz 2.4 gilt für σ die Gleichung:

$$\sigma(z+\omega) = \chi(\omega)e^{\eta(\omega)(z+\frac{\omega}{2})}\sigma(z)$$

für alle ω aus Ω und z aus $\mathbb{C}$ mit

$$\chi(\omega) = \begin{cases} 1 & : \frac{\omega}{2} \in \Omega \\ -1 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Einsetzen von τ und 1 liefert somit $\sigma(z+1;\tau) = -e^{\eta\cdot(z+\frac{1}{2})}\sigma(z;\tau)$ und unter Verwendung der Legendre-Relation

$$\begin{aligned} \sigma(z+\tau;\tau) &= -e^{\eta(\tau)(z+\frac{\tau}{2})}\sigma(z;\tau) \\ &= -e^{(-2\pi iz-\pi i\tau+\eta\tau z+\eta\frac{\tau^2}{2})}\sigma(z;\tau) \\ &= -\frac{1}{w\sqrt{q}}\,e^{\eta\tau(z+\frac{\tau}{2})}\sigma(z;\tau). \end{aligned}$$

Nun folgt insgesamt

$$\begin{aligned} f(z+1) &= -e^{-\eta\frac{(z+1)^2}{2}} \cdot e^{\pi i(z+1)} \cdot \sigma(z+1;\tau) \\ &= -e^{-\eta\frac{(z+1)^2}{2}} \cdot (-\sqrt{w}) \cdot \sigma(z+1;\tau) \\ &= e^{-\eta\frac{z^2}{2}}\, e^{-\eta(z+\frac{1}{2})}\, e^{\eta(z+\frac{1}{2})} \cdot \sqrt{w} \cdot \sigma(z;\tau) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(z+\tau) &= e^{-\eta\frac{(z+\tau)^2}{2}} \cdot \sqrt{w}\, e^{\pi i\tau} \cdot \sigma(z+\tau;\tau) \\ &= -e^{\eta\frac{z^2}{2}} \sqrt{w}\sqrt{q}\, e^{-\eta(z\tau+\frac{\tau^2}{2})} \frac{1}{w\sqrt{q}}\, e^{\eta\tau(z+\frac{\tau}{2})} \sigma(z;\tau) \\ &= -e^{\eta\frac{z^2}{2}} \sqrt{w}\, \frac{1}{w} \sigma(z;\tau) \\ &= -\frac{1}{w} f(z). \end{aligned}$$

□

(3.2) Satz
Definiert man die Funktion f wie in Lemma 3.1, so gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}(w-1)\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}.$$

Dabei konvergiert das Produkt absolut und kompakt gleichmäßig in z. ◇

Beweis
Zuerst wollen wir die absolute und kompakt gleichmäßige Konvergenz des Produktes zeigen. Dazu betrachten wir die einzelnen Faktoren des Produktes. Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1-wq^n)$ konvergiert absolut und kompakt gleichmäßig, denn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-wq^n-1) = -w\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut als geometrische Reihe mit $|q| = |e^{2\pi i\tau}| < 1$, wenn man ausnutzt, dass $z \mapsto |-w|$ stetig und somit auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Eine analoge Rechnung liefert die absolute und kompakt gleichmäßige Konvergenz für $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{w}q^n)$. Weiterhin folgt aus $|q| < 1$, dass $\lim_{n\to\infty}(1-q^n)^2 = 1$, das heißt es existiert eine natürliche Zahl n_0, sodass $(1-q^n)^2 \geq 1/2$ für alle natürlichen Zahlen n, die größer sind als n_0. Damit erhält

man

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(1-q^n)^2}-1\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{q^n}{(1-q^n)^2}\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{n_0}\left|\frac{q^n}{(1-q^n)^2}\right| + 2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|q|^n.$$

Dies liefert die absolute Konvergenz des Produktes $\prod_{n=1}^{\infty} 1/(1-q^n)^2$ und somit auch die kompakt gleichmäßige Konvergenz, da das Produkt unabhängig von z ist. Insgesamt ist das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}$$

somit absolut und kompakt gleichmäßig konvergent als Produkt von absolut und kompakt gleichmäßige konvergenten Produkten.
Um die Identität zu zeigen, definieren wir die rechte Seite als

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i}(w-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}.$$

Dann ist g aufgrund der lokal gleichmäßigen Konvergenz und dem Satz von Weierstrass eine ganze Funktion als Komposition ganzer Funktionen und weiterhin erfüllt g die gleichen Relationen wie f, wie wir nun zeigen werden:

$$\begin{aligned}
g(z+1) &= \frac{1}{2\pi i}(e^{2\pi i(z+1)}-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-e^{2\pi i(z+1)}q^n)(1-\frac{1}{e^{2\pi i(z+1)}}q^n)}{(1-q^n)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i}(w-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2} \\
&= g(z).
\end{aligned}$$

Für $g(z+\tau) = -\frac{1}{w}g(z)$ bemerken wir zunächst, das unter $z \mapsto z+\tau$ die Terme wq^n und $\frac{1}{w}q^n$ auf wq^{n+1} und $\frac{1}{w}q^{n-1}$ abgebildet werden, denn es gilt

$$e^{2\pi i(z+\tau)}e^{2\pi i n\tau} = e^{2\pi i z}e^{2\pi i(n+1)\tau}$$

und

$$e^{-2\pi i(z+\tau)}e^{2\pi i n\tau} = e^{-2\pi i z}e^{2\pi i(n-1)\tau}.$$

Dies liefert

$$g(z+\tau) = \frac{1}{2\pi i}(wq-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^{n+1})(1-\frac{1}{w}q^{n-1})}{(1-q^n)^2}.$$

Nun erhält man die zweite Relation durch Betrachtung des folgenden Quotienten, welchen man aufgrund der absoluten Konvergenz des Produktes als Teleskopprodukt berechnen kann.

$$\begin{aligned}
\frac{g(z+\tau)}{g(z)} &= \frac{\frac{1}{2\pi i}(wq-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^{n+1})(1-\frac{1}{w}q^{n-1})}{(1-q^n)^2}}{\frac{1}{2\pi i}(w-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^{n})(1-\frac{1}{w}q^{n})}{(1-q^n)^2}} \\
&= \frac{wq-1}{w-1}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(1-wq^{n+1})(1-\frac{1}{w}q^{n-1})}{(1-wq^{n})(1-\frac{1}{w}q^{n})} \\
&= \frac{wq-1}{w-1}\lim_{N\to\infty}\frac{1-\frac{1}{w}}{1-wq}\frac{1-wq^{N+1}}{1-\frac{1}{w}q^N} \\
&= \frac{wq-1}{w-1}\frac{1-\frac{1}{w}}{1-wq}\lim_{N\to\infty}\frac{1-wq^{N+1}}{1-\frac{1}{w}q^N} \\
&= \frac{wq-1}{w-1}\frac{1-\frac{1}{w}}{1-wq} \\
&= -\frac{1}{w}.
\end{aligned}$$

Setzt man $h := \frac{f}{g}$, so erhält man eine elliptische Funktion zum Gitter $\tau\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, denn aufgrund der oben gezeigten Relationen für f und g erhält man wie folgt die Periodizität für h. Es gilt

$$h(z+1) = \frac{f(z+1)}{g(z+1)} = \frac{f(z)}{g(z)} = h(z),$$

sowie

$$h(z+\tau) = \frac{f(z+\tau)}{g(z+\tau)} = \frac{-wf(z)}{-wg(z)} = h(z).$$

Weiterhin hat g als absolut konvergentes Produkt Nullstellen 1. Ordnung in den Stellen z, für welche $w = e^{2\pi i z} = 1$ oder $wq^m = e^{2\pi i(m\tau+z)} = 1$ oder entsprechend $\frac{1}{w}q^m = e^{2\pi i(m\tau-z)} = 1$ für m in den natürlichen Zahlen gilt. Dies sind aber genau die Stellen ω aus dem Gitter $\tau\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ und somit genau die Nullstellen von f, wenn man die Darstellung

$$\sigma(z,\Omega) = z\cdot\prod_{0\neq\omega\in\Omega}(1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2}$$

betrachtet. Insbesondere handelt es sich bei diesen Nullstellen nach dem Produktsatz von Weierstrass ([FTI], Kap. VIII, Satz(2.15)) ebenfalls um Nullstellen 1. Ordnung und somit ist h nach dem ersten Liousvilleschen Satz ([FTII], Kap. X, Satz(2.3)) eine holomorphe und somit konstante elliptische Funktion zum Gitter $\tau\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$. Mit der absoluten und lokal gleichmäßigen Konvergenz von σ erhält man

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z,\tau)}{z}=\lim_{z\to 0}\prod_{0\neq\omega\in\Omega}(1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}(\frac{z}{\omega})^2}=1$$

und somit

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{-\eta\frac{z^2}{2}}e^{2\pi iz}\sigma(z;\tau)}{z}=1$$

und mit der absoluten und lokal gleichmäßigen Konvergenz des Produktes auch

$$\lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\pi iz}(w-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\exp(2\pi iz)|_{z=0}=1$$

Insgesamt erhält man also

$$\lim_{z\to 0}h(z)=\lim_{z\to 0}\frac{zf(z)}{zg(z)}=1$$

und somit die Behauptung. □

Aus dem Satz erhält man sofort eine Produktdarstellung der σ-Funktion.

(3.3) Korollar
Es gilt:

$$\sigma(z;\tau)=\frac{1}{2\pi i}e^{\eta\frac{z^2}{2}}(\sqrt{w}-\frac{1}{\sqrt{w}})\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}$$

Beweis
Man erhält die Aussage durch Umstellen der Gleichungen aus 3.2 und 3.1 nach σ, denn

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}(w-1)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}$$

und

$$f(z)=e^{-\eta\frac{z^2}{2}}\cdot\sqrt{w}\cdot\sigma(z;\tau)$$

liefern durch gleichsetzen und auflösen bereits

$$\sigma(z;\tau)=\frac{1}{2\pi i}e^{\eta\frac{z^2}{2}}(\sqrt{w}-\frac{1}{\sqrt{w}})\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}.$$

□

§4 Das Δ-Produkt

Ziel dieses Abschnittes ist eine Darstellung von Δ von der Form

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

für alle τ aus der oberen Halbebene. Dafür werden wir vier Produkte einführen, mithilfe deren Identitäten wir die Terme $e_2 - e_1$, $e_3 - e_2$ und $e_3 - e_1$ ausdrücken können, denn das Produkt dieser Terme ist bis auf eine Konstante bereits die Diskriminante. Zunächst erinnern wir noch einmal an die Definition der Δ-Funktion.

(4.1) Definition
Die Δ-Funktion ist für τ aus der oberen Halbebene definiert durch

$$\Delta(\tau) := g_2^3(\tau) - 27 g_3^2(\tau).$$

$\diamond$

Dafür definieren wir uns zunächst folgende Produkte.

(4.2) Definition
Es sei $q := e^{2\pi i \tau}$ für τ aus der oberen Halbebene wie im vorherigen Abschnitt definiert. Dann definieren wir folgende Produkte:

1. $P_0 := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$
2. $P_1 := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-\frac{1}{2}})$
3. $P_2 := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)$
4. $P_3 := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-\frac{1}{2}})$ $\diamond$

Als erstes bemerken wir die absolute Konvergenz dieser Produkte.

(4.3) Bemerkung
Die Produkte P_0, P_1, P_2 und P_3 konvergieren absolut. $\diamond$

Beweis
Nach der Definition der absoluten Konvergenz eines Produktes ist diese äquivalent zur absoluten Konvergenz der Reihe über die um 1 erniedrigten Faktoren. Diese Reihe lässt sich immer auf die geometrische Reihe mit $|q| = |e^{2\pi i \tau}| < 1$ zurückführen, deren absolute Konvergenz bekannt ist. Im Speziellen erhalten wir:

P_0 konvergiert absolut $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^n - 1) = - \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut.

P_1 konvergiert absolut $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-\frac{1}{2}} - 1) = -q^{-\frac{1}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut.

P_2 konvergiert absolut $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + q^n - 1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut.

P_3 konvergiert absolut $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-\frac{1}{2}} - 1) = q^{-\frac{1}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut. □

Wenn wir alle diese Produkte miteinander multiplizieren, so erhalten wir die erste bemerkenswerte Identität.

(4.4) Lemma
Es gilt

$$P_0\, P_1\, P_2\, P_3 \;=\; P_0$$

Beweis
Aufgrund der vorher gezeigten absoluten Konvergenz der Produkte dürfen wir folgende Rechnung durchführen.

$$\begin{aligned} P_0\, P_1\, P_2\, P_3 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^n)(1 - q^{n-\frac{1}{2}})(1 + q^{n-\frac{1}{2}}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1}) \\ &= P_0 \end{aligned}$$

□

Insbesondere liefert uns das Lemma die Identität $P_1\, P_2\, P_3 \;= 1$. Unter Verwendung dieser Gleichheit können wir folgendes Lemma beweisen.

(4.5) Lemma
Es gelten folgende Identitäten.

1. $2\pi i\, P_0^2\, \sigma(\frac{1}{2}; \tau) = 2i\, e^{\eta/8} P_2^2$
2. $2\pi i\, P_0^2\, \sigma(\frac{\tau}{2}; \tau) = -q^{-1/4}\, e^{\eta\tau^2/8} P_1^2$
3. $2\pi i\, P_0^2\, \sigma(\frac{\tau+1}{2}; \tau) = q^{-1/4} i\, e^{\eta(\tau+1)^2/8} P_3^2$ ◇

Beweis
Wir verwenden die Produktdarstellung der σ-Funktion aus dem vorherigen Paragraphen.

$$\sigma(z;\tau) = \frac{1}{2\pi i} e^{\eta\frac{z^2}{2}} (\sqrt{w} - \frac{1}{\sqrt{w}}) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-wq^n)(1-\frac{1}{w}q^n)}{(1-q^n)^2}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} 2\pi i\, P_0^2\, \sigma(1/2;\tau) &= 2\pi i\, P_0^2 \frac{1}{2\pi i\, P_0^2} e^{\eta/8}(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)(1+q^n) \\ &= 2i\, e^{\eta/8}\, P_2^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 2\pi i\, P_0^2\, \sigma(\tau/2;\tau) &= e^{\eta\tau^2/8}(q^{1/4} - q^{-1/4}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n+1/2})(1-q^{n-1/2}) \\ &= -e^{\eta\tau^2/8} q^{-1/4}(1-q^{1/2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n+1/2})(1-q^{n-1/2}) \\ &= -e^{\eta\tau^2/8} q^{-1/4}\, P_1^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2\pi i\, P_0^2\, \sigma((\tau+1)/2;\tau) &= e^{\eta(\tau+1)^2/8}(iq^{1/4} - \frac{1}{iq^{1/4}}) \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n+1/2})(1+q^{n-1/2}) \\ &= e^{\eta(\tau+1)^2/8} iq^{-1/4}(1+q^{1/2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n+1/2})(1+q^{n-1/2}) \\ &= e^{\eta(\tau+1)^2/8} iq^{-1/4}\, P_3^2 \end{aligned}$$

□

Aus Lemma 2.5 sind folgende Gleichungen bekannt:

$$e_2 - e_1 = e^{-\eta(\omega_1)\frac{\omega_2}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\omega_3}{2})}{\sigma(\frac{\omega_1}{2})\sigma(\frac{\omega_2}{2})} \right)^2$$

$$e_3 - e_1 = e^{\eta(\omega_1)\frac{\omega_3}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\omega_2}{2})}{\sigma(\frac{\omega_1}{2})\sigma(\frac{\omega_3}{2})} \right)^2$$

$$e_3 - e_2 = e^{\eta(\omega_2)\frac{\omega_3}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\omega_1}{2})}{\sigma(\frac{\omega_2}{2})\sigma(\frac{\omega_3}{2})} \right)^2$$

In diese Gleichungen setzen wir $\omega_1 = \tau$, $\omega_2 = 1$ und $\omega_3 = \tau + 1$ ein und bringen sie mithilfe der Legendre-Relation auf folgende Form.

$$e_2 - e_1 = e^{-(\eta\tau - 2\pi i)\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\tau+1}{2};\tau)}{\sigma(\frac{1}{2};\tau)\sigma(\frac{\tau}{2};\tau)} \right)^2$$

$$e_3 - e_1 = e^{(\eta\tau - 2\pi i)\frac{\tau+1}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{1}{2};\tau)}{\sigma(\frac{\tau}{2};\tau)\sigma(\frac{\tau+1}{2};\tau)} \right)^2$$

$$e_3 - e_2 = e^{\eta\frac{\tau+1}{2}} \left(\frac{\sigma(\frac{\tau}{2};\tau)}{\sigma(\frac{1}{2};\tau)\sigma(\frac{\tau+1}{2};\tau)} \right)^2$$

Diese Gleichungen wollen wir nun durch unsere Produkte P_0 bis P_3 ausdrücken.

(4.6) Lemma
Es gilt:

1. $e_2 - e_1 = \pi^2 P_0^4 P_3^8$
2. $e_3 - e_1 = 16\pi^2 \sqrt{q}\, P_0^4 P_2^8$
3. $e_3 - e_2 = -\pi^2 P_0^4 P_1^8$ ◇

Beweis
Setzen wir für $\sigma(\frac{\omega_i}{2};\tau)$ für $i = 1, 2, 3$ die Identitäten aus Lemma 4.5 ein und verwenden $P_1 P_2 P_3 = 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} e_2 - e_1 &= e^{-(\eta\tau - 2\pi i)/2} (2\pi i)^2 P_0^4 \left(\frac{e^{\eta(\tau+1)^2/8} i q^{-1/4} P_3^2}{-2ie^{\eta\tau^2/8} q^{-1/4} e^{\eta/8} P_1^2 P_2^2} \right)^2 \\ &= -e^{-\eta\tau/2} (-4\pi^2) P_0^4 e^{\eta\tau/2} \frac{1}{4} \left(\frac{P_3^2}{P_1^2 P_2^2} \right)^2 \\ &= \pi^2 P_0^4 P_3^8 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} e_3 - e_1 &= e^{(\eta\tau - 2\pi i)(\tau+1)/2} (2\pi i)^2 P_0^4 \left(\frac{2ie^{\eta/8} P_2^2}{ie^{\eta((\tau+1)^2+\tau^2)/8} (-q^{-1/2}) P_1^2 P_3^2} \right)^2 \\ &= e^{\eta\tau(\tau+1)/2 - 2\pi i(\tau+1)/2} \left(-4\pi^2 P_0^4\right) 4\, q\, P_2^8\, e^{-\eta\tau(\tau+1)/2} \\ &= q^{-1/2} 16\pi^2 q\, P_0^4 P_2^8 \\ &= 16\pi^2 P_0^4 \sqrt{q}\, P_2^8 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e_3 - e_2 &= e^{\eta(\tau+1)/2}(2\pi i)^2\, P_0^4 \left(\frac{e^{\eta\tau^2/8}(-q^{-1/4}\, P_1^2)}{-2q^{-1/4} e^{\eta(\tau+1)^2/8}\, P_3^2\, e^{\eta/8}\, P_2^2} \right)^2 \\ &= -4\pi^2\, P_0^4\, e^{\eta(\tau+1)/2} \frac{1}{4} e^{-\eta(\tau+1)/2}\, P_1^8 \\ &= -\pi^2\, P_0^4\, P_1^8 \end{aligned}$$

□

Somit erhält man aus Korollar 2.7 sofort

(4.7) Korollar
Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \\ &= (2\pi)^{12} q\, P_0^{24}(P_1\, P_2\, P_3)^{16} \\ &= (2\pi)^{12} q\, P_0^{24} \end{aligned}$$

◇

Als nächstes erinnern wir noch einmal an die Definition der Dedekindschen η-Funktion.

(4.8) Definition
Die η-Funktion ist definiert durch

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau})$$

für τ aus der oberen Halbebene. ◇

(4.9) Bemerkung
Die Δ-Funktion ist also bis auf eine Konstante die 24. Potenz der Dedekindschen η-Funktion. Dies folgt sofort aus der Darstellung

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}) = q^{\frac{1}{24}}\, P_0$$

wenn man $q = e^{2\pi i \tau}$ beachtet. Insbesondere ist die Konstante also $(2\pi)^{12}$. ◇

— *Anwendung auf die absolute Invariante j* —

An dieser Stelle werden wir die gerade hergeleitete Produktentwicklung von Δ verwenden, um die aus Funktionentheorie 2 bekannte Aussage über die Fourier-Entwicklung der absoluten Invariante zu zeigen, nämlich das diese natürliche Fourier-Koeffizienten besitzt. Zu Beginn sei noch einmal an die Definition der absoluten Invariante erinnert.

(4.10) Definition
Die absolute Invariante j ist definiert durch

$$j(\tau) := \frac{(12g_2(\tau))^3}{\Delta(\tau)}$$

für τ aus der oberen Halbebene. ◇

Als erstes zeigen wir ein Lemma, das wir für den Beweis der folgenden Aussage brauchen.

(4.11) Lemma
Für jede natürliche Zahl r und $a_{m,n}$ nicht-negativ und ganzzahlig für alle natürlichen Zahlen m und $1 \leq n < r$ gilt:

$$\prod_{n=1}^{r} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} e^{2\pi i m \tau} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{2\pi i m \tau}$$

wobei die b_m wieder ganzzahlig und nicht-negativ sind. ◇

Beweis
Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach Anzahl der Faktoren, welche wir mit r bezeichnen.
Im Fall $r = 1$ ist die Aussage klar.
Im Fall $r = 2$ erhält man dem Cauchy-Produkt, dass

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,1} e^{2\pi i m \tau}\Big) \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,2} e^{2\pi i m \tau}\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{2\pi i m \tau}$$

mit $b_m = \sum_{l=0}^{m} a_{l,1} a_{m-l,2}$ und somit sind die b_m ganzzahlig und nicht-negativ.
Im Induktionsschritt seien nun $a_{m,n}$ ganzzahlig und nicht-negativ für alle natürlichen Zahlen m und $1 \leq n \leq r+1$. Dann gilt

$$\prod_{n=1}^{r+1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} e^{2\pi i m \tau} = \prod_{n=1}^{r} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} e^{2\pi i m \tau} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,r+1} e^{2\pi i m \tau}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\prod_{n=1}^{r}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}e^{2\pi i m\tau} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{2\pi i m\tau}$ mit ganzzahligen und nicht-negativen Fourier-Koeffizienten b_m und somit haben wir den Induktionsschritt auf den bereits gezeigten Fall $r = 2$ zurückgeführt. Damit folgt die Behauptung aus dem Prinzip der vollständigen Induktion. □

Nun erhalten wir die bereits aus der Funktionentheorie II bekannte Aussage.

(4.12) Satz
Die absolute Invariante j hat eine Fourier-Entwicklung der Form

$$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} j_n e^{2\pi i n\tau}.$$

Dabei sind die j_n positiv und ganzzahlig. ◇

Beweis
Nach Lemma 2.8 hat g_2 eine Fourier-Entwicklung der Form

$$g_2(\tau) = \frac{(2\pi)^4}{12}(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi i n\tau}).$$

Weiterhin ist nach Bemerkung 4.9 eine Produktentwicklung für Δ bekannt, denn es gilt

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}e^{2\pi i\tau}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau})^{24}.$$

Kombiniert man diese beiden Identitäten mit der Definition der absoluten Invarianten, so erhält man

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i\tau}j(\tau) &= (1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi i n\tau})^3\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau})^{24}\right)^{-1}\\
&= (1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi i n\tau})^3\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1 - e^{2\pi i n\tau}}\right)^{24}\\
&= (1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi i n\tau})^3\prod_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=0}^{\infty}e^{2\pi i m n\tau})^{24}
\end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, dass alle Faktoren ganzzahlige und positive Fourier-Koeffizienten haben. Für die Fourier-Entwicklung von $g_2(\tau)$ folgt dies sofort, wenn man die Relation $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$ beachtet. Das heißt es gilt die Aussage für das Produkt zu zeigen. Mit dem zuvor gezeigten Lemma 4.11 erhält man nun für eine fest gewählte natürliche Zahl r:

$$\prod_{n=1}^{r}\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau}\right)^{24} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,r} e^{2\pi i m\tau}$$

und

$$\prod_{n=1}^{r+1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau}\right)^{24} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,r+1} e^{2\pi i m\tau}$$

mit $c_{m,r}$ und $c_{m,r+1}$ ganzzahlig und nicht-negativ. Aus der Eindeutigkeit der Fourier-Entwicklung und

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} c_{m,r+1} e^{2\pi i m\tau} &= \prod_{n=1}^{r+1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau}\right)^{24}\\ &= \prod_{n=1}^{r}\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau}\right)^{24}\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m(r+1)\tau}\right)^{24}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,r} e^{2\pi i m\tau}\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m(r+1)\tau}\right)^{24}\end{aligned}$$

erhält man $c_{m,r+1} = c_{m,r}$ für $0 \leq m < r$, wenn man

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m(r+1)\tau} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i m(r+1)\tau}$$

beachtet. Aufgrund von

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau}\right)^{24} &= \lim_{r\to\infty}\prod_{n=1}^{r}\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau}\right)^{24}\\ &= \lim_{r\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{m,r} e^{2\pi i m\tau}\end{aligned}$$

erhält man somit, dass der r-te Fourier-Koeffizient ab dem $r+1$-ten Partialprodukt konstant ist und somit die Fourier-Koeffizienten des Produktes ganzzahlig und nicht-negativ sind. Das die Fourier-Koeffizienten positiv sind folgt sofort aus $\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i m n\tau}$ und der Tatsache, dass für $n = 1$ jeder Fourier-Koeffizient größer als 0 ist. Insbesondere ist der nullte Fourier-Koeffizient 1, was man aus der Identität $c_{m,r+1} = c_{m,r}$ für $0 \leq m < r$ erhält, wenn man $r = 1$ betrachtet. Somit haben wir gezeigt, dass jeder Faktor eine Fourier-Entwicklung mit natürlichen

Fourier-Koeffizienten hat.
Eine Ausmultiplikation ergibt daher

$$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} j_n e^{2\pi i n\tau},$$

wobei die j_n positiv und ganzzahlig sind. $\square$

Literatur

[FTI] Krieg, A. , Skript zur Funktionentheorie I, RWTH Aachen

[FTII] Krieg, A. , Skript zur Funktionentheorie II, RWTH Aachen

[KK] Koecher, M.; Krieg, A. , Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Auflage, Springer