LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. A. Krieg
A. Henn

Aachen, den 28. September 2012

1. Übung zur Vorlesung Siegelsche Modulformen

Abgabe am 15.10. um 12 Uhr

Aufgabe 1

a) Für $n > 1$ sei

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $S \in \mathcal{P}_n$.

b) Für $n > 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $S_\alpha \in \overline{\mathcal{P}_n}$?

c) Für $n > 1$ sei

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Füür welche n gilt $S \in \overline{\mathcal{P}_n}$?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $S \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$. Die Matrixnorm von S ist definiert als

$$\|S\| := \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Sx\|,$$

wobei $\|.\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Zeigen Sie für $S \in \overline{\mathcal{P}_n}$:

$$E_n > S \Leftrightarrow \|S\| < 1.$$

(4 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Sei $S \in \mathcal{P}_n$. Zeigen Sie, dass dann ein eindeutig bestimmtes $P \in \mathcal{P}_n$ existiert mit $S = P^2$. Gilt eine analoge Aussage auch für $S \in \overline{\mathcal{P}_n}$?

(4 Punkte)

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass eine Matrix $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ genau dann positiv semidefinit ist, wenn $\mathrm{Spur}(SP) \geqslant 0$ für jede positiv semidefinite Matrix $P \in \overline{\mathcal{P}_n}$.

b) Zeigen Sie ein entsprechendes Kriterium für positiv definite Matrizen.

(3+2 Punkte)