Einführung in die Hecke-Theorie

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie II, 13.12.2013

Jonas Kaszián

§1 Relevante Operationen der Modulgruppe

(1.1) Definition (Modulgruppe)
Es bezeichne $\Gamma := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} | \det(A) = 1\}$ den Kern der Determinante auf $(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}),\cdot) := (\{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} | A \text{ invertierbar}\},\cdot)$, genannt die Modulgruppe. $\diamond$

Da die Determinante multiplikativ ist, operiert die Modulgruppe Γ durch Linksmultiplikation auf den Urbildern $M_m := \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} | \det(A) = m\}$ der Determinante. Dabei ist $\Gamma\backslash M_m = \{\Gamma A | A \in M_m\}$ die Menge der Bahnen dieser Operation. Die oberen Dreiecksmatrizen der Form $V := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) | ad = m, 0 \leq b < d\}$ bilden ein Vertretersystem.

(1.2) Lemma
Die volle lineare Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ operiert durch Modulsubstitution $(M,z) \mapsto \Phi_M(z)$ auf der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die Einschränkung auf die Modulgruppe $\Gamma \leq \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ lässt sich zu einer Operation auf $\mathbb{H}$ einschränken, die wir schreiben können als $(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right),\tau) \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. $\diamond$

Diese Operation spielt eine entscheidende Rolle für die im Folgenden betrachteten Strukturen und liefert vor allem die

(1.3) Definition (Modulformen)
Sei $k \in \mathbb{Z}$ und definiere für $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ meromorph und $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ den Strichoperator durch $f|_A(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$. Dann können wir setzen: $\mathbb{M}_k := \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \mid f \text{ beschränkt auf } \mathbb{H}_\gamma\ \forall \gamma > 0 \text{ und holomorph mit } f = f|_A\ \forall A \in \Gamma\}$ ist der Raum der ganzen Modulformen vom Gewicht k, mit $\mathbb{H}_\gamma := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) \geq \gamma\}$. $\diamond$

Die $\mathbb{M}_k$ bilden $\mathbb{C}$-Vektorräume, wobei $\mathbb{M}_k = \{0\}$ für alle $k < 0$ und ihre direkte Summe $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbb{M}_k$ eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra. Da Modulformen 1-periodisch sind, lassen sie sich in Fourierreihen entwickeln: $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n$. Wegen der Beschränktheit verschwinden alle Koeffizienten von negativen Potenzen von q. Mit $\mathbb{S}_k := \{f \in \mathbb{M}_k \mid a_0 = 0 \text{ in der Fourierentwicklung}\} \leq \mathbb{M}_k$ bezeichnen wir den Unterraum der Spitzenformen von Gewicht k.

§2 Untergruppen eines Gitters

In diesem Abschnitt bestimmen wir für die Definition des Hecke-Operators alle Untergruppen von festem Index $m \in \mathbb{N}$ eines Gitters $G \subset \mathbb{C}$.

(2.1) Definition (Gitter)
Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Dann nennt man die (diskrete) Untergruppe $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ von $(\mathbb{C}, +)$, die durch die $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der ω_i gegeben ist, ein Gitter in $\mathbb{C}$. $\diamond$

Durch einen der Automorphismen $z \mapsto \omega_i^{-1} \cdot z$ von $(\mathbb{C}, +)$ können wir uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Gitter der Form $\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\tau$ für ein $\tau \in \mathbb{H}$ beschränken.

(2.2) Lemma
Sei $\Omega = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\tau$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Die Untergruppen vom Index $m \in \mathbb{N}$ von Ω sind $H = < d, a\tau + b >$, wobei $a, b, d \in \mathbb{N}_0$ mit $ad = m$ und $0 \leq b < d$ seien und $< . >$ das Gruppenerzeugnis in Ω bezeichne. $\diamond$

Beweis
Wegen der Definition durch das Erzeugnis ist jedes solche H natürlich eine Untergruppe. Bestimme also den Index $[\Omega : H]$. Dafür genügt es zu zeigen, dass

$$V := \{s \cdot 1 + t \cdot \tau \mid s \in \{0, 1, \ldots, d-1\}, t \in \{0, 1, \ldots, a-1\}\}$$

ein Vertretersystem von Ω/H ist. Sei dazu $g = g_1 \cdot [1] + g_2[\tau] \in \Omega/H$ für $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}$. Aus der Division mit positivem Rest erhalten wir

$$g_2 = q_1 a + r_1 \quad \text{und} \quad g_1 - bq_1 = q_2 d + r_2 \quad \text{mit } 0 \leq r_1 < a, 0 \leq r_2 < d, q_i, r_i \in \mathbb{Z}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} g &= g_1[1] + q_1 a[\tau] + r_1[\tau] = g_1[1] + q_1 \cdot (-b[1]) + r_1[\tau] \\ &= (g_1 - q_1 b)[1] + r_1[\tau] = q_2 d[1] + r_2[1] + r_1[\tau] = r_2[1] + r_1[\tau], \end{aligned}$$

also enthält V einen Vertreter jeder Restklasse. Ist $[v_1] = [v_2]$ für $v_1, v_2 \in V$, so

$$v_1 - v_2 = (s_1 - s_2)1 + (t_1 - t_2)\tau \in H,$$

also folgen nacheinander

$$\begin{aligned} &(t_1 - t_2) \in \mathbb{Z}a \cap \{-(a-1), -(a-2), \ldots, a-1\} = \{0\}, \\ \Rightarrow\ & v_1 - v_2 = (s_1 - s_2) \in \mathbb{Z}d \cap \{-(d-1), -(d-2), \ldots, d-1\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Somit ist $v_1 = v_2$ und V ein Vertretersystem von Ω/H mit $ad = m$ Elementen.

Sei nun andersherum $G \leq \Omega$ eine beliebige Untergruppe vom Index $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $d := \mathrm{ord}(\omega_1 G)$ ein Teiler der Gruppenordnung $m = |\Omega/G|$. Dann ist also

$$a := m/d = |(\Omega/G)/(<\omega_1 G>)| = |(\Omega/G)/(<\omega_1, G>/G)| = |\Omega/(<\omega_1, G>)|,$$

woraus mit $H := <\omega_1, G>$ sofort $\Omega/H = <\omega_2 H>$ folgt, also

$$H = a(\omega_2 H) \quad \text{oder auch} \quad a\omega_2 \in H = <\omega_1, G> .$$

Hieraus folgt die Existenz eines $b \in \mathbb{Z}$ mit $a\omega_2 + b\omega_1 \in G$. Wegen $d\omega_1 \in G$ können wir dabei $0 \leq b < d = ord(\omega_1 G)$ wählen. Also enthält G eine Gruppe

$$< d\omega_1, a\omega_2 + b\omega_1 > \leq G \leq \Omega, \qquad \square$$

die den gleichen Index m in Ω hat, womit wir deren Gleichheit erhalten. Denn es gilt wegen der Kommutativität $[\Omega : U] = [\Omega : G][G : U]$ für $U \leq G \leq \Omega$. Also hat G die behauptete Gestalt für $a, b, d \in \mathbb{N}_0$ mit $ad = m, 0 \leq b < d$ wie oben konstruiert.

§3 Die Hecke-Operatoren $T_m, m \in \mathbb{N}$

(3.1) Definition (Hecke-Operator)
Sei $G_\mathbb{C}$ die Menge der Gitter in $\mathbb{C}$ und $F : G_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine homogene Funktion vom Grad $-k$, d.h. $F(\lambda\Omega) = \lambda^{-k}F(\Omega)$ für $\lambda \in \mathbb{C}^*, \Omega \in G_\mathbb{C}$. Definiere für $m \in \mathbb{N}$ den Hecke-Operator T_m durch

$$T_m(F) : G_\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \Omega \mapsto \sum_{H \leq \Omega, [\Omega:H]=m} F(H).$$

Dies ist wohldefiniert, da die Summe nach (2.2) endlich ist und $T_m(F)$ ist mit F ebenfalls homogon vom Grad $-k$. $\diamond$

(3.2) Satz (Hecke-Operator auf Modulformen)
Sei $f \in \mathbb{M}_k$ eine Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ und $F : G_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die dazugehörige homogone Funktion vom Grad $-k$ gegeben durch $F(< 1, \tau >) = f(\tau), \tau \in \mathbb{H}$. Dabei ist der Funktionswert unabhängig von der Basiswahl von $\Omega \in G_\mathbb{C}$, wie aus der Lösung von "Funktionentheorie II, SS13, Blatt 6, Aufgabe 4 b)"mit der Modularität

von f folgt. Dann definieren wir $T_m(f)$ als die zu $T_m(F)$ gehörige Modulform multipliziert mit dem Skalierungsfaktor m^{k-1}, also $T_m(f)(\tau) := m^{k-1} \cdot T_m(F)(< 1, \tau >), \tau \in \mathbb{H}$. Es gilt

$$T_m f(\tau) = m^{k-1} \sum_{ad=m} d^{-k} \sum_{0 \leq b < d} f(\frac{a\tau + b}{d}) = m^{k-1} \sum_{\Gamma \backslash M_m} (c\tau + d)^{-k} f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}), \quad \tau \in \mathbb{H}$$

◇

und $T_m f$ ist wieder vom Gewicht k.

Beweis
Setzt man $\Omega :=< 1, \tau >$ für $\tau \in H$, so gilt

$$m^{1-k} T_m f(\tau) = T_m F(< 1, \tau >) = \sum_{H \leq \Omega, [\Omega : H] = m} F(H) \overset{(2.2)}{=} \sum_{ad=m, 0 \leq b < d} F(< d, a\tau + b >)$$

$$\overset{F \text{ homogen}}{=} \sum_{ad=m, 0 \leq b < d} d^{-k} F(< 1, \frac{a\tau + b}{d} >) = \sum_{ad=m} d^{-k} \sum_{0 \leq b < d} f(\frac{a\tau + b}{d}),$$

also die erste Gleichung. Da für jeden Summanden ledglich eine lineare Transformation vorgeschaltet wird, ist jeder Summand und somit auch $T_m f$ holomorph und beschränkt. Da $m^{k-1} T_m(F)$ homogen von Grad $-k$ ist, ist das dazugehörige $T_m f$ modular, also auch eine ganze Modulform vom Gewicht k. Indem wir uns an die Operation der Modulgruppe (1.1) auf M_m zurückerinnern, sehen wir, dass

$$\sum_{ad=m} d^{-k} \sum_{0 \leq b < d} f(\frac{a\tau + b}{d}) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in V} d^{-k} f(\frac{a\tau + b}{d}) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \backslash M_m} (c\tau + d)^{-k} f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}),$$

da die Summanden im letzten Term bei Linksmultiplikation von $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $\gamma \in \Gamma$ gleich bleiben ($f \in \mathbb{M}_k$ und Operation) und somit die Summanden unabhängig von der Wahl des Vertreters sind. Beachte, dass dabei wegen $\tau \in \mathbb{H}$ stets $c\tau + d \neq 0$ gilt.

□

Den Nutzen des Skalierungsfaktor für Fourier-Entwicklungen erkennen wir im

(3.3) Satz (Hecke-Operatoren auf Fourier-Entwicklungen)
Hat $f \in \mathbb{M}_k$ die Fourier-Entwicklung $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$, so erhalten wir die Fourier-Entwicklung von $T_m f$ als

$$T_m f(z) = \sum_{d|m} \left(\frac{m}{d}\right)^{k-1} \sum_{n \geq 0, d|n} a_n q^{mn/d^2} = \sum_{n \geq 0} q^n \sum_{r|(m,n)} r^{k-1} a_{mn/r^2}.$$

Insbesondere ist dank der Skalierung stets $\sum_{r|(m,n)} r^{k-1} a_{mn/r^2} \in \mathbb{Z}$, falls alle a_n ganzzahlig sind. ◇

Beweis
Im Folgenden benutzen wir (aus geometrischer Summenformel)

$$\sum_{0 \le b < d} e^{2\pi i n b/d}/d = \begin{cases} 1 & \text{falls } d|n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

sodass wir erhalten:

$$\begin{aligned}
T_m f(z) &= m^{k-1} \sum_{ad=m} d^{-k} \sum_{0 \le b < d} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \\
&= \sum_{ad=m} (m/d)^{k-1} d^{-1} \sum_{0 \le b < d} \sum_{n \ge 0} a_n e^{2\pi i n (az+b)/d} \\
&= \sum_{ad=m} (m/d)^{k-1} \sum_{n \ge 0} a_n q^{na/d} \sum_{0 \le b < d} e^{2\pi i n b/d}/d \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{ad=m} (m/d)^{k-1} \sum_{n \ge 0, d|n} a_n q^{na/d} \\
&\overset{a=m/d}{=} \sum_{d|m} \left(\frac{m}{d}\right)^{k-1} \sum_{n \ge 0, d|n} a_n q^{nm/d^2} \\
&\overset{ds:=n}{=} \sum_{d|m} \sum_{s \ge 0} \left(\frac{m}{d}\right)^{k-1} a_{ds} q^{sm/d} \\
&\overset{r:=m/d}{=} \sum_{r|m} \sum_{s \ge 0} r^{k-1} a_{ms/r} q^{sr} \\
&\overset{n:=sr}{=} \sum_{r|m} \sum_{n \ge 0, r|n} r^{k-1} a_{mn/r^2} q^n \\
&= \sum_{n \ge 0} q^n \sum_{r|(m,n)} r^{k-1} a_{mn/r^2}.
\end{aligned}$$

□

(3.4) Korollar
Für teilerfremde $m, \mu \in \mathbb{N}$ gilt $T_{m\mu} = T_m T_\mu$. Für Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ und $d \in \mathbb{N}_{>1}$ gilt

$$T_{p^d} = T_p T_{p^{d-1}} - p^{d-1} T_{p^{d-2}} \tag{2}$$

Insbesondere kommutieren die Operatoren $T_m, m \in \mathbb{N}$ miteinander. ◇

Beweis

Seien also $m, \mu \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(m, \mu) = 1$. Für alle $f = \sum_{n\geq 0} q^n a_n \in \mathbb{M}_k$ gilt dann

$$\begin{aligned} T_m T_\mu f(z) &= T_m \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{s|(\mu,n)} s^{k-1} a_{\mu n/s^2} \\ &= \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{r|(m,n)} r^{k-1} \sum_{s|(\mu,mn/r^2)} s^{k-1} a_{\mu mn/(rs)^2} \\ &\overset{(\mu,m)=1}{=} \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{r|(m,n)} \sum_{s|(\mu,n)} (rs)^{k-1} a_{\mu mn/(rs)^2} \\ &\overset{(\mu,m)=1}{=} \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{t|(m\mu,n)} t^{k-1} a_{\mu mn/t^2} = T_{\mu m} f(z), \end{aligned}$$

da $r^2 s | mn \overset{(r,s)=1}{\Leftrightarrow} s|mn \overset{(m,s)=1}{\Leftrightarrow} s|n$. Dies liefert die erste Behauptung; für Gleichung (2) seien $p \in \mathbb{P}, d \in \mathbb{N}_{>1}$, so folgt

$$\begin{aligned} &(T_p T_p^{d-1} - p^{k-1} T_{p^{d-2}}) f(z) \\ &= T_p \sum_{n\geq 0} q^n \left(\sum_{s|(p^{d-1},n)} s^{k-1} a_{p^{d-1}n/s^2} \right) - \sum_{n\geq 0} q^n \left(\sum_{r|(p^{d-2},n)} (pr)^{k-1} a_{p^{d-2}n/r^2} \right) \\ &\overset{r:=pr}{=} \sum_{n\geq 0} q^n \left(\sum_{g|(p,n)} g^{k-1} \sum_{s|(p^{d-1},pn/g^2)} s^{k-1} a_{p^d n/(gs)^2} - \sum_{p|r|(p^{d-1},pn)} r^{k-1} a_{p^d n/r^2} \right) \\ &\overset{g\in\{1,p\}}{=} \sum_{n\geq 0} q^n \left(\sum_{s|(p^{d-1},pn)} s^{k-1} a_{p^d n/s^2} + \sum_{s|(p^{d-1},n/p)} (ps)^{k-1} a_{p^{d-2}n/s^2} - \sum_{p|r|(p^{d-1},pn)} r^{k-1} a_{p^d n/r^2} \right) \\ &= \sum_{n\geq 0} q^n \left(\sum_{p\nmid s|(p^{d-1},pn)} s^{k-1} a_{p^d n/s^2} + \sum_{s|(p^{d-1},n/p)} (ps)^{k-1} a_{p^{d-2}n/s^2} \right) \\ &\overset{s:=ps}{=} \sum_{n\geq 0} q^n \left(a_{p^d n} + \sum_{p|s|(p^d,n)} s^{k-1} a_{p^d n/s^2} \right) = \sum_{n\geq 0} q^n \sum_{s|(p^d,n)} s^{k-1} a_{p^d n/s^2} = T_{p^d} f(z). \end{aligned}$$

Induktiv folgt, dass alle T_{p^d} Polynome in T_p, T_1 sind. Da aber $T_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{M}_k}$, sind sie insbesondere Polynome in T_p und kommutieren somit.

Zusammen folgt nun mit einer Primfaktorzerlegung das Kommutieren aller Hecke-Operatoren.

$\square$

§4 Anwendungen der Hecke-Theorie

Wir werden die Hecke-Theorie auf einige Beispiele anwenden, insbesondere die Spitzenform $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$, um zahlentheoretische Aussagen zu folgern.

— *Die Spitzenform Δ und die τ-Funktion* —

Dabei sei $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$ die normierte Diskriminante:

$$\Delta(z) = \sum_{n\geq 0} \tau(n)q^n = \sum_{n\geq 1} \tau(n)q^n, \quad \tau(0) = 0, \tau(1) = 1.$$

Mit (3.3) berechnen wir die ersten zwei Koeffizienten von $T_m f$ als

$$a_0 \sum_{r|m} r^{k-1} + a_m q.$$

Da Modulformen genau dann Spitzenformen sind, wenn der erste Koeffizient der Fourierentwicklung verschwindet, werden auch die Räume der Spitzenformen in sich überführt. Weil zusätzlich $\mathbb{S}_{12} =< \Delta >_{\mathbb{C}}$ eindimensional ist, gilt also $T_m\Delta = c_m\Delta$ für ein von $m \in \mathbb{N}$ abhängiges $c_m \in \mathbb{C}$. Da der Koeffizient von q^1 der normierten Diskriminante 1 ist, gilt nach obiger Gleichung insbesondere $c_m = \tau(m)$, also ist Δ simultaner Eigenvektor aller T_m zum eigenen Entwicklungskoeffizienten $\tau(m)$.

Hieraus folgt insbesondere sofort die von Ramanujan behauptete (verallgemeinerte) Multiplikativität der τ-Funktion; berechne dazu den n-ten Koffizienten in der Entwicklung von $T_m\Delta$:

$$\tau(m)\tau(n) = (\tau(m)\Delta)|_n = T_m\Delta|_n \overset{(3.3)}{=} \sum_{r|(m,n)} r^{11}\tau(\frac{mn}{r^2}) \quad \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist τ als multiplikativ im zahlentheoretischen Sinne, also $(m,n) = 1 \Rightarrow \tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.

— *Spektraltheore und die Modulformen G_k* —

Ist allgemeiner $f \in \mathbb{M}_k$ simultane Eigenform, gilt also $T_m f = \lambda_m f$ mit Konstanten $\lambda_m \in \mathbb{C}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so folgt jeweils $a_m = \lambda_m a_1$, also entweder $0 = a_1 = a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also f konstant oder wir können f zu f/a_1 normieren und es gilt $T_m f = a_m f$ für alle $m \in \mathbb{N}$, woraus wir die gleiche Multiplikativität der Fourierkoeffizienten wie bei τ erhalten. Dies gilt zum Beispiel für den (eindeutigen) normierten Erzeuger der eindimensionalen $\mathbb{S}_k$, also für $k \in \{16, 18, 20, 22, 26\}$, und die Eisenstein-Reihen G_k für $k \geq 4$ gerade: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $T_m G_k = \sigma_{k-1}(m) G_k$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ auch $\sigma_{k-1}(m)\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1}\sigma_{k-1}(mn/d^2)$. Wählt man ein geeignetes Skalarprodukt auf den Räumen $\mathbb{M}_k$, so sind alle T_m selbstadjungiert (und kommutieren), also lassen sie sich alle simultan diagonalisieren.

Literatur

[1] Don Zagier; Elliptic Modular Forms and Their Applications (Seiten 1-103 in The 1-2-3 of Modular Forms); Universitext; 2008

[2] Max Koecher, Aloys Krieg; Elliptische Funktionen und Modulformen; Springer DE; 2007

[3] Aloys Krieg; Skripte zur Analysis I und II des Lehrstuhls A für Mathematik, RWTH Aachen; 2007 und 2008

[4] Hartmut Führ, Aloys Krieg und Sebastian Walcher; Skript zur Analysis III des Lehrstuhls A für Mathematik, RWTH Aachen; 2012

[5] Aloys Krieg; Skripte zur Funktionentheorie I und II des Lehrstuhls A für Mathematik, RWTH Aachen; 2012 und 2013