Modulformen zu Kongruenzgruppen

Vortrag zum Seminar Funktionentheorie II, 13.12.2013

Nina Neidhardt

§1 Einleitung

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit Modulformen zu einer Kongruenzgruppe. Er gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil werden die grundlegenden Begriffe wie Charakter, Kongruenzgruppe und Modulform eingeführt, sowie wichtige Sätze genannt und bewiesen. Außerdem werden die Begriffe mit Hilfe von Beispielen, der Theta-Reihe und der Eisensteinreihe, verdeutlicht.
Im zweiten Teil betrachten wir die FOURIER-Entwicklung eines abelschen Charakters mod n.
Dies hilft uns, um im dritten Teil die Dimensionsabschätzung des Raumes $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ der ganzen Modulformen vom Gewicht k zu einem abelschen Charakter χ mod n und einer Kongruenzgruppe Λ durchzuführen.
Der Vortrag orientiert sich stark an Kapitel III, §7, Abschnitt 1,2 und 5 aus [KK98], wobei das Beispiel der Eisensteinreihen Seite 17f des Buches [BvdGHZ08] entnommen wurde.

Inhaltsverzeichnis

§2 Der Begriff Modulform zu einer Kongruenzgruppe

Im Verlauf dieses Vortrags sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

(2.1) Bemerkung
Wir erinnern uns, dass wir in [(2.4) im Vortrag "Kongruenzuntergruppen und diskontinuierliche Gruppen"] für ein $n \in \mathbb{N}$ die *Hauptkongruenzgruppe* (mod n) definiert hatten als

$$\begin{aligned} \Gamma[n] :=& \{M \in \Gamma \mid M \equiv E \pmod{n}\} \\ =& \{M \in \Gamma \mid \exists X \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{Z}) \text{ mit } M = E + n \cdot X\}. \end{aligned} \qquad \diamond$$

(2.2) Definition (Kongruenzgruppe)
Eine Untergruppe Λ von Γ heißt *Kongruenzgruppe*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\Gamma[n] \subseteq \Lambda.$$

(2.3) Korollar
Jede Kongruenzgruppe Λ hat endlichen Index in Γ. $\diamond$

Beweis
Da Λ und $\Gamma[n]$ jeweils Untergruppen von Γ sind, also

$$\Gamma[n] \leq \Lambda \leq \Gamma,$$

gilt

$$[\Gamma : \Lambda] \leq [\Gamma : \Gamma[n]] < \infty$$

gemäß [(2.6) im Vortrag Kongruenzuntergruppen und diskontinuierliche Gruppen].$\square$

— *Charakter* —

(2.4) Definition (Charakter)
Sei Λ eine Kongruenzgruppe.
Dann heißt jeder Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \Lambda \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

ein *abelscher Charakter von* Λ.
Als *trivialen Charakter* bezeichnen wir den Charakter, der alles auf 1 abbildet, und schreiben ihn zukünftig einfach als 1.
Wie bei Gruppenhomomorphismen üblich heißt ein abelscher Charakter *endlich*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\chi^m \equiv 1.$$

Man sagt, dass χ ein *Charakter* mod *n von* Λ ist, wenn $\Gamma[n] \subseteq \Lambda$ und

$$\chi(M) = 1 \text{ für alle } M \in \Gamma[n]$$

gilt. ◇

(2.5) Beispiel
Erinnern wir uns[1] an die Theta-Gruppe

$$\Gamma_\vartheta = \langle J, T^2 \rangle,$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt[2]

$$\Gamma_\vartheta = \Gamma[2] \cup \Gamma[2] \cdot J,$$

also ist $\Gamma[2] \subseteq \Gamma_\vartheta$ und somit ist Γ_ϑ eine Kongruenzgruppe.
Die Funktion $\chi_\vartheta : \Gamma_\vartheta \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit

$$\chi_\vartheta(M) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } M \in \Gamma[2] \\ -1 & \text{, falls } M \notin \Gamma[2] \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.
Betrachte dazu

$$A, B, C, D \in \Gamma[2], \; X := CJ, \; Y := DJ \in \Gamma_\vartheta \setminus \Gamma[2].$$

Dann gilt:

[1] Korollar XI (3.8) im Skript "Funktionentheorie II" [Kri13]
[2] S.304 im Skript "Funktionentheorie II" [Kri13]

1. Fall: $M = A \in \Gamma[2],\ N = B \in \Gamma[2]$:
$$AB \in \Gamma[2]$$
und daher
$$\chi_\vartheta(MN) = \chi_\vartheta(AB) = 1 = 1 \cdot 1 = \chi_\vartheta(A)\chi_\vartheta(B) = \chi_\vartheta(M)\chi_\vartheta(N)$$

2. Fall: $M = A \in \Gamma[2],\ N = X = CJ \notin \Gamma[2]$:
$$AX = ACJ \in \Gamma[2] \cdot J = \Gamma_\vartheta \setminus \Gamma[2], \text{ also } AX \notin \Gamma[2]$$
und
$$\chi_\vartheta(MN) = \chi_\vartheta(AX) = -1 = 1 \cdot (-1) = \chi_\vartheta(A)\chi_\vartheta(X) = \chi_\vartheta(M)\chi_\vartheta(N)$$

3. Fall: $M = X \notin \Gamma[2],\ N = A \in \Gamma[2]$:
Angenommen, $XA \in \Gamma[2]$.
Da $\Gamma[2]$ eine Gruppe ist und $A,\ A^{-1} \in \Gamma[2]$ gilt dann
$$X = XAA^{-1} \in \Gamma[2],$$
was ein Widerspruch zu $X \notin \Gamma[2]$ ist.
Also gilt $XA \notin \Gamma[2]$ und daher:
$$\chi_\vartheta(MN) = \chi_\vartheta(XA) = -1 = (-1) \cdot 1 = \chi_\vartheta(X)\chi_\vartheta(A) = \chi_\vartheta(M)\chi_\vartheta(N)$$

4. Fall: $M = X = CJ \notin \Gamma[2],\ N = Y = DJ \in \Gamma[2]$:
Angenommen, dass $CJDJ \notin \Gamma[2]$, also $CJD \in \Gamma[2]$.
Da $D,\ D^{-1} \in \Gamma[2]$ und $\Gamma[2]$ eine Gruppe ist gilt dann:
$$CJ = CJD\ D^{-1} \in \Gamma[2].$$
Das ist ein Widerspruch zu $M = CJ \notin \Gamma[2]$.
Also gilt $CJDJ \in \Gamma[2]$ und daher
$$\chi_\vartheta(MN) = \chi_\vartheta(CJDJ) = 1 = (-1) \cdot (-1) = \chi_\vartheta(X)\chi_\vartheta(Y) = \chi_\vartheta(M)\chi_\vartheta(N).$$

Also ist χ_ϑ ein Gruppenhomomorphismus auf Γ_ϑ und somit ein abelscher Charakter von Γ_ϑ. $\diamond$

(2.6) Lemma
Sei Λ eine Kongruenzgruppe.
Ist χ ein abelscher Charakter mod n von Λ, so ist er endlich. $\diamond$

Beweis
Da $[\Gamma : \Lambda] < \infty$ (siehe (2.3)) und wegen

$$\Gamma[n] \leq \Lambda \leq \Gamma$$

gilt

$$[\Lambda : \Gamma[n]] = \frac{[\Gamma : \Lambda]}{[\Gamma : \Gamma[n]]} =: m < \infty.$$

Also ist $\Lambda/\Gamma[n]$ eine endliche Gruppe der Ordnung m. Mit dem kleinen Satz von Fermat für die Faktorgruppe gilt dann $L^m \in \Gamma[n]$ für alle $L \in \Lambda$. Da außerdem χ ein Gruppenhomomorphismus und ein abelscher Charakter ist, gilt also:

$$\chi^m(L) = \chi(L^m) = 1.$$

— *Modulform* —

(2.7) Definition (Modulform)
Sei $k \in \mathbb{Z}$, Λ eine Kongruenzgruppe und χ ein abelscher Charakter von Λ. Eine Funktion
$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$
heißt *ganze Modulform vom Gewicht k zur Kongruenzgruppe* Λ *und zum Charakter* χ , wenn gilt:

(MK.1) f ist holomorph auf $\mathbb{H}$.

(MK.2) $f|_k L = \chi(L) f$ für alle $L \in \Lambda$.

(MK.3) $f|_k M$ ist für jedes $M \in \Gamma$ bei ∞ holomorph. ◇

Wir erinnern uns an die Definition
$$f|_k M(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H} \text{ und } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Die Menge aller ganzen Modulformen vom Gewicht k zu Λ und χ bezeichnen wir mit $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$. Für den trivialen Charakter wählen wir die Abkürzung
$$\mathbb{M}_k(\Lambda) := \mathbb{M}_k(\Lambda, 1).$$

(2.8) Bemerkung
$\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Für die uns bekannten Modulformen vom Gewicht k gilt $\mathbb{M}_k = \mathbb{M}_k(\Gamma)$. ◇

Beweis
Dass $\mathbb{M}_k = \mathbb{M}_k(\Gamma)$ gilt folgt mit der Definition.

Die Funktionen, die (MK.1) erfüllen, bilden einen Vektorraum, da die holomorphen Funktionen einen Vektorraum bilden.
Seien g, f Funktionen, die (MK.2) erfüllen, und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $L \in \Lambda$:
$$(f+g)|_k L(\tau) = f|_k L(\tau) + g|_k L(\tau) = \chi(L) f(\tau) + \chi(L) g(\tau) = \chi(L)(f+g)(\tau)$$
und
$$(\alpha f)|_k L(\tau) = \alpha f|_k L(\tau) = \alpha \chi(L) f(\tau) = \chi(L)(\alpha f)(\tau),$$
also sind die Funktionen, die (MK.2) erfüllen, ein Vektorraum.
Seien g, f Funktionen, die (MK.3) erfüllen, und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $M \in \Gamma$:
$$(f+g)|_k M(\tau) = f|_k M(\tau) + g|_k M(\tau)$$

und
$$(\alpha f)|_k M(\tau) = \alpha f|_k M(\tau).$$
Da sich die Holomorphie eines Punktes nicht durch skalare Multiplikation oder Addition einer anderen an diesem Punkt holomorphen Funktion ändert, sind die Funktionen, die (MK.3) erfüllen ein Vektorraum.
Da der endliche Durchschnitt von Vektorräumen wiederum ein Vektorraum ist, bildet die Menge $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ der Funktionen, die (MK.1), (MK.2) und (MK.3) erfüllen, einen Vektorraum. $\square$

(2.9) Beispiel
Wir betrachten die vierte Potenz der Theta-Reihe $\vartheta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit
$$\vartheta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}.$$
ϑ ist auf $\mathbb{H}$ holomorph, also ist dies auch ϑ^4 (MK.2).
Erinnern wir uns an χ_ϑ aus (2.5).
Da $J \notin \Gamma[2]$, also $\chi_\vartheta(J) = -1$, und[3] $\vartheta^4(-\frac{1}{\tau}) = -\tau^2 \cdot \vartheta^4(\tau)$ gilt:
$$\vartheta^4|_2 J(\tau) = (\tau)^{-2}\vartheta^4(-\frac{1}{\tau}) = (-1)\cdot\frac{\tau^2}{\tau^2}\cdot\vartheta^4(\tau) = \chi_\vartheta(J)\vartheta^4(\tau).$$
Wegen $T^2 \in \Gamma[2]$, also $\chi_\vartheta(T^2) = 1$ und[4] $\vartheta(\tau+2) = \vartheta(\tau)$ gilt:
$$\vartheta^4|_2 T^2(\tau) = 1^{-2}\cdot\vartheta^4(\tau+2) = \chi_\vartheta(T^2)\vartheta^4(\tau).$$
Da $\Gamma_\vartheta = \langle J, T^2\rangle$ und mit (2.17) gilt also für alle $L \in \Gamma_\vartheta$:
$$\vartheta^4|_2 L(\tau) = \chi_\vartheta(L)\vartheta^4(\tau).$$
Also gilt (MK.2).
Da wir ϑ auch schreiben können als eine FOURIER-Entwicklung, die bei 0 anfängt, nämlich
$$\vartheta(\tau) := 1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{\pi i n^2 \tau}$$
ist ϑ holomorph bei ∞.
Es gilt $\Gamma = \langle J, T\rangle$. Wegen
$$\vartheta^4|_2 T(\tau) = \vartheta^4(\tau)$$
und
$$\vartheta^4|_2 T(\tau) = 1^{-2}\vartheta^4(\tau+1) \overset{5}{=} 2\vartheta^4(\tau) - \vartheta^4(\tau)$$
Also ist mit (2.17) auch $\vartheta^4|_2 M$ für alle $M \in \Gamma$ bei ∞ holomorph (MK.3).
Damit ist $\vartheta^4 \in \mathbb{M}_2(\Gamma_\vartheta, \chi_\vartheta)$. $\diamond$

[3] S.330 im Skript "Funktionentheorie II" [Kri13]
[4] S.330 im Skript "Funktionentheorie II" [Kri13]

— *Eisensteinreihen* —

(2.10) Definition
Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir:

$$\Gamma_0(N) := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \ \middle| \ c \equiv_N 0 \right\}$$

(2.11) Lemma
Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $\Gamma_0(N)$ eine Gruppe und es gilt $\Gamma[N] \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq \Gamma$.
Also ist $\Gamma_0(N)$ eine Kongruenzgruppe. $\diamond$

Beweis
Es gilt $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$.
Für $L = \begin{pmatrix} a_L & b_L \\ c_L & d_L \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ gilt: $LM \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ und

$$(LM)_{21}(mod\ N) = [c_L a_M + d_L c_M](mod\ N) = c_L a_M (mod\ N) + d_L c_M (mod\ N) = 0,$$

also gilt $LM \in \Gamma_0(N)$ und somit ist $\Gamma_0(N)$ eine Gruppe.
Offensichtlich gilt $\Gamma_0(N) \subseteq \Gamma = \ \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.
Sei $M \in \Gamma[N]$, also $M \in \Gamma$ und $M \equiv E(mod\ N)$.
Dann ist $(M)_{21} \equiv 0(mod\ N)$ und daher $M \in \Gamma_0(N)$, also $\Gamma[N] \subseteq \Gamma_0(N)$. $\square$

(2.12) Definition
Als *Dirichlet-Charakter modulo N* bezeichnen wir einen Charakter χ auf $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.
Erweitern wir χ auf $\mathbb{Z}$ mit

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(n \ (\text{mod } N)) & \text{, falls ggT}(n,N) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

so bezeichnen wir diese Abbildung ebenfalls mit χ und nennen sie einen *Dirichlet-Charakter*. $\diamond$

(2.13) Lemma
Sei χ ein Dirichlet-Charakter. Definiere

$$\tilde{\chi} : \Gamma_0(N) \to \mathbb{C}, \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \chi(a) = \begin{cases} \chi(a \ (\text{mod } N)) & \text{, falls ggT}(a,N) = 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $\tilde{\chi}$ ein Charakter auf $\Gamma_0(N)$. $\diamond$

Beweis
Wir wollen zeigen, dass χ ein Gruppenhomomorphismus ist und für alle $M \in \Gamma_0(N)$ gilt:

$$|\tilde{\chi}(M)| = 1.$$

Zunächst bemerken wir, dass $|\tilde{\chi}(M)| = |\chi(\ (M)_{11} \pmod N\ )| = 1$, da χ ein Charakter auf $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist.
Bezüglich des Gruppenhomomorphismus überlegen wir zunächst, dass

$$\tilde{\chi}(E) \overset{ggT(1,N)=1}{=} \chi(1 \pmod N\ ) = 1,$$

wobei die letzte Gleichung wiederum gilt, weil χ ein Charakter auf $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist.
Seien $L, M \in \Gamma_0(N)$ (also insb. $c_M = 0 \pmod N$). Dann gilt:

$$\mathrm{ggT}(a_L a_M + b_L c_M,\ N) = \mathrm{ggT}(a_L \cdot a_M,\ N)$$

und

$$\mathrm{ggT}(a_L \cdot a_M,\ N) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(a_L,\ N) = 1 \text{ und } \mathrm{ggT}(a_M,\ N) = 1,$$

also

$$\mathrm{ggT}(a_L a_M + b_L c_m,\ N) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(a_L,\ N) = 1 \text{ und } \mathrm{ggT}(a_M,\ N) = 1.$$

1. Fall: Sei $\mathrm{ggT}(a_L a_M + b_L c_m,\ N) = 1$. Dann ist:

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(LM) &= \chi([a_L a_M + b_L c_M] \pmod N\ ) = \chi(a_L a_M \pmod N\ ) \\ &= \chi(a_L \pmod N\ ) \cdot \chi(a_M \pmod N\ ) = \tilde{\chi}(L) \cdot \tilde{\chi}(M).\end{aligned}$$

2. Fall: Sei $\mathrm{ggT}(a_L a_M + b_L c_m,\ N) \neq 1$, also $\mathrm{ggT}(a_L) \neq 1$ oder $\mathrm{ggT}(a_M) \neq 1$ und daher $\chi(a_L) = 0$ oder $\chi(a_M) = 0$.
Dann ist:

$$\tilde{\chi}(LM) = \chi(a_L a_M + b_L c_M) = 0 = \chi(a_L) \cdot \chi(a_M) = \tilde{\chi}(L) \cdot \tilde{\chi}(M).$$

Also ist $\tilde{\chi}$ ein Gruppenhomomorphismus und daher ein Charakter auf $\Gamma_0(N)$. □

(2.14) Beispiel
Für ein $N \in \mathbb{N}$, betrachte die Kongruenzgruppe $\Gamma_0(N)$ und einen nicht-trivialen Dirichlet-Charakter χ mit $\tilde{\chi} : \Gamma_0(N) \to \mathbb{C}$ definiert wie in (2.13) und $k \in \mathbb{N}$ mit $\chi(-1) = (-1)^k$. Die Funktion $\mathbb{G}_{k,\chi} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit

$$\mathbb{G}_{k,\chi}(z) = c_k(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \chi(d) d^{k-1} \right) e^{2\pi i z n}$$

mit $c_k(\chi) = \frac{1}{2}L(1-k,\chi) \in \mathbb{R}$ und $L(s,\chi)$, der analytische Fortsetzung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^s,$$

ist eine ganze Modulform vom Gewicht k zur Kongruenzgruppe $\Gamma_0(N)$ und zum Charakter $\tilde{\chi}$, also $\mathbb{G}_{k,\chi} \in \mathbb{M}(\Gamma_0(N),\tilde{\chi})$.
Beachte, dass $\mathbb{G}_{k,\chi}$ der FOURIER-Entwicklung einer Eisensteinreihe ähnelt.
Nach einigen Überlegungen kann man ähnlich wie bei der Eisensteinreihe die Holomorphie auf $\mathbb{H}$, die Gleichung

$$\mathbb{G}_{k,\chi}|_k L = \tilde{\chi}(L)\mathbb{G}_{k,\chi} \text{ für alle } L \in \Gamma_0(N)$$

und die Holomorphie von $\mathbb{G}_{k,\chi}|_k M$ für alle $M \in \Gamma$ im Punkt ∞ nachweisen. ◇

— *Modulform* —

(2.15) Korollar
Seien Λ eine Kongruenzgruppe, χ und χ' abelsche Charaktere und $k,\ \ell \in \mathbb{Z}$.
Dann kann man die ganzen Modulformen zu Λ und χ bzw. χ' multiplizieren und es gilt:

$$\mathbb{M}_\ell(\Lambda,\chi) \cdot \mathbb{M}_k(\Lambda,\chi') \subseteq \mathbb{M}_{\ell+k}(\Lambda,\chi\cdot\chi').$$

Beweis
Sei $f \in \mathbb{M}_\ell(\Lambda,\chi) \cdot \mathbb{M}_k(\Lambda,\chi')$. Dann gibt es

$$f_1 \in \mathbb{M}_\ell(\Lambda,\chi) \text{ und } f_2 \in \mathbb{M}_k(\Lambda,\chi') \text{ mit } f = f_1 \cdot f_2.$$

Daher sind f_1 und f_2 auf $\mathbb{H}$ holomorph, also auch ihr Produkt f und somit ist (MK.1) aus (2.7) erfüllt.

Es gilt für alle $M \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} f|_{\ell+k}M(\tau) &= (c\tau+d)^{-(\ell+k)}f(M\tau) = (c\tau+d)^{-\ell}f_1(M\tau)\cdot(c\tau+d)^k f_2(M\tau) \\ &= f_1|_\ell M(\tau)\cdot f_2|_k M(\tau) \end{aligned}$$

Also gilt für alle $L \in \Lambda$ mit (MK.2) für f_1 und f_2:

$$f|_{\ell+k}L(\tau) = f_1|_\ell L(\tau)\cdot f_2|_k L(\tau) \overset{(MK.2)}{=} \chi(L)f_1(\tau)\cdot\chi'(L)f_2(\tau) = \chi\cdot\chi'(\tau)f(\tau),$$

also ist (MK.2) von f erfüllt.

Betrachten wir die Holomorphie von $f|_{\ell+k}M$ bei ∞. Es gilt mit (MK.3) für f_1 und f_2:

$$f|_{\ell+k}M(\infty) = f_1|_\ell M(\infty) \cdot f_2|_k M(\infty) < \infty$$

Also gilt (MK.3) für f und somit $f \in \mathbb{M}_{\ell+k}(\Lambda, \chi \cdot \chi')$. $\square$

(2.16) Korollar
Seien $k \in \mathbb{Z}$, Λ eine Kongruenzgruppe mit $-E \in \Lambda$ und χ ein abelscher Charakter von Λ. Gilt $\chi(-E) \neq (-1)^k$, so folgt $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) = \{0\}$. $\diamond$

Beweis
Sei $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ beliebig.
Da $-E \in \Lambda$ ist, gilt mit (MK.2) aus (2.7), dass

$$\chi(-E) \cdot f(\tau) \overset{(MK.2)}{=} f|_k(-E)(\tau) = (0 \cdot \tau - 1)^{-k} \cdot f\left(\frac{-\tau + 0}{0 \cdot \tau - 1}\right) = (-1)^{-k} \cdot f(\tau).$$

Aus $\chi(-E) \neq (-1)^k$ folgt nun $f(\tau) = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$.
Also gilt $f = 0$ und daher $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) = \{0\}$. $\square$

(2.17) Lemma
Sei f auf $\mathbb{H}$ holomorph und $L, M \in \Gamma$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$(f|_k L)\,\big|_k M = f|_k(LM)$$

Beweis
Es gilt für alle $\tau \in \mathbb{H}$, $L = \begin{pmatrix} a_L & b_L \\ c_L & d_L \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
(f|_k L)\,\big|_k M(\tau) =& (c_M\tau + d_M)^{-k} f|_k L(M\tau) \\
=& (c_M\tau + d_M)^{-k} (c_L(M\tau) + d_L)^{-k} f(L(M\tau)) \\
=& (c_M\tau + d_M)^{-k} \left(c_L\left(\frac{a_M\tau + b_M}{c_M\tau + d_M}\right) + d_L\right)^{-k} f(LM\tau) \\
=& \big(c_L \cdot (a_M\tau + b_M) + d_L \cdot (c_M\tau + d_M)\big)^{-k} f(LM\tau) \\
=& \big((c_L a_M + d_L c_M)\tau + (c_L b_M + d_L d_M)\big)^{-k} f(LM\tau) \\
=& f|_k(LM)(\tau),
\end{aligned}$$ $\square$

wobei die letzte Umformung gilt mit:

$$LM := \begin{pmatrix} a_L & b_L \\ c_L & d_L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_L a_M + b_L c_M & a_L b_M + b_L d_M \\ c_L a_M + d_L c_M & c_L b_M + d_L d_M \end{pmatrix}.$$

(2.18) Korollar
Seien $k \in \mathbb{Z}$, Λ eine Kongruenzgruppe, χ ein abelscher Charakter von Λ und $M \in \Gamma$. Dann ist

$$\chi_M(K) := \chi(MKM^{-1}) \text{ für alle } K \in M^{-1}\Lambda M$$

ein abelscher Charakter von $M^{-1}\Lambda M$, und die Abbildung

$$\kappa : \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \longrightarrow \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M),\ f \longmapsto f|_k M$$

ist ein Vektorraumisomorphismus. ◇

Beweis
Da Λ eine Kongruenzgruppe ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma[n] \subseteq \Lambda$.
Mit [(2.6) im Vortrag "Kongruenzuntergruppen und diskontinuierliche Gruppen"] wissen wir, dass $\Gamma[n]$ ein Normalteiler in Γ ist, insbesondere gilt für $M \in \Gamma$:

$$\Gamma[n] = M^{-1}\Gamma[n]M \subseteq M^{-1}\Lambda M.$$

Also ist $M^{-1}\Lambda M$ eine Kongruenzgruppe.

Es gilt $\text{Bild}(\chi_M) \subseteq \text{Bild}(\chi) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
Für $K, K' \in M^{-1}\Lambda M$ gilt $MKM^{-1}, MK'M^{-1} \in \Lambda$, also folgt, da χ ein abelscher Charakter von Λ ist:

$$\begin{aligned}\chi_M(KK') &= \chi(M(KK')M^{-1}) = \chi(MKM^{-1}MK'M^{-1}) = \chi(MKM^{-1})\chi(MK'M^{-1}) \\ &= \chi_M(K)\chi_M(K')\end{aligned}$$

Also ist

$$\chi_M : M^{-1}\Lambda M \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus und damit χ_M ein abelscher Charakter von $M^{-1}\Lambda M$.

Sei $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$. Dann gilt für alle $\tau \in \mathbb{H}$:

$$\kappa(f)(\tau) := f|_k M(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

Da $M \in \Gamma$ ist, gilt $c\tau + d \neq 0$. Da f auf $\mathbb{H}$ holomorph ist, ist also auch $\kappa(f)$ auf $\mathbb{H}$ holomorph und es folgt (MK.1) aus (2.7).
Da außerdem für alle $M' \in \Gamma$ gilt: $f|_k M'$ ist bei ∞ holomorph, gilt dies auch für $\kappa(f)|_k$, also folgt (MK.3) aus (2.7).

Um die Gültigkeit von (MK.2) zu beweisen, erinnern wir uns, dass mit (2.17) für ein beliebiges $L \in \Lambda$ gilt:

$$f|_k(LM) = [f_k(L)]\,\big|_k(M).$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}[f|_k(M)]\big|_k(M^{-1}LM)(\tau) &= f|_k(MM^{-1}LM)(\tau) = f|_k(LM)(\tau) = [f|_k(L)]\,\big|_k M(\tau) \\ &\overset{\substack{f\in\mathbb{M}_k(\Lambda,\chi)\\(MK.2)}}{=} [\chi(L)f]\,\big|_k M(\tau) = \chi_M(M^{-1}LM)f|_kM(\tau).\end{aligned}$$

Damit erfüllt $f|_kM$ auch (MK.2) und somit ist $f|_kM \in \mathbb{M}(M^{-1}\Lambda M, \chi_M)$.
Also ist κ wohldefiniert.

Aus (2.8) wissen wir, dass $\mathbb{M}_k(\Lambda,\chi)$ und $\mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M,\chi)$ Vektorräume sind.
Seien $f, g \in \mathbb{M}_k(\Lambda,\chi)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\kappa(\alpha f) = (\alpha f)|_kM &= (c\tau+d)^{-k}(\alpha f)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \\ &= \alpha(c\tau+d)^{-k}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \alpha f|_kM = \alpha\kappa(f)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\kappa(f+g) = (f+g)|_kM &= (c\tau+d)^{-k}(f+g)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \\ &= (c\tau+d)^{-k}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) + (c\tau+d)^{-k}g\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \\ &= f|_kM + g|_kM = \kappa(f)+\kappa(g),\end{aligned}$$

also ist κ ein Vektorraumhomomorphismus.

Um die Bijektivität zu zeigen, betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned}\kappa' : \mathbb{M}_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M) &\to \mathbb{M}_k((M^{-1})^{-1}M^{-1}\Lambda M M^{-1}, (\chi_M)_{M^{-1}}) = \mathbb{M}_k(\Lambda,\chi) \\ g &\mapsto g|_kM^{-1}\end{aligned}$$

κ' ist die Umkehrabbildung von κ, da für ein beliebiges $f \in \mathbb{M}(\Lambda,\chi)$ gilt:

$$\kappa'(\kappa(f)) = \kappa'(f|_kM) = [f|_kM]\,|_kM^{-1} \overset{(2.17)}{=} f|_k(MM^{-1}) = f_kE = f$$

Also ist κ bijektiv. $\square$

§ 3 Die FOURIER-Entwicklung

(3.1) Satz
Seien $k \in \mathbb{Z}$, Λ eine Kongruenzgruppe mit $\Gamma[n] \subseteq \Lambda$ und χ ein abelscher Charakter mod n von Λ. Ist $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ und $M \in \Gamma$, so besitzt $f|_k M$ eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$f|_k M(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M) e^{\frac{2\pi i m \tau}{n}}, \ \tau \in \mathbb{H},$$

die für jedes $\varepsilon > 0$ auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}\tau \geq \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig konvergiert. Die FOURIER-Koeffizienten $\alpha_f(m; M)$ sind eindeutig bestimmt und erfüllen

$$\alpha_f(m; LM) = \chi(L)\alpha_f(m; M)$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$, $L \in \Lambda$ und $M \in \Gamma$. $\diamond$

Beweis
Aus (2.18) wissen wir, dass $f|_k M \in \mathbb{M}(M^{-1}\Lambda M, \chi_M)$ ist. Betrachten wir

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma[n].$$

Dann folgt für alle $\tau \in \mathbb{H}$: $T^n \tau = \frac{\tau + n}{0+1} = \tau + n$.
Da $M \in \Gamma$ und $\Gamma[n]$ ein Normalteiler von Γ ist ([(2.6) im Vortrag "Kongruenzuntergruppen und diskontinuierliche Gruppen"]), gilt

$$M\Gamma[n]M^{-1} = \Gamma[n].$$

Insbesondere ist $MT^n M^{-1} \in \Gamma[n] \subseteq \Lambda$ und somit, da χ ein abelscher Charakter mod n ist, folgt $\chi(MT^n M^{-1}) = 1$.
Zudem gilt auch $T^n \in M^{-1}\Lambda M$ und deshalb auch mit (MK.2)

$$(f|_k M)|_k T^n = \chi_M(T^n) f|_k M(\tau).$$

Also wissen wir:

$$\begin{aligned} f|_k M(\tau + n) &= (0 \cdot \tau + 1)^{-k} f|_k M(T^n \tau) \overset{(\mathrm{Def}(f|_k M)|_k)}{=} (f|_k M)\,|_k T^n(\tau) \\ &\overset{(MK.2)}{=} \chi_M(T^n) f|_k M(\tau) = \chi(MT^n M^{-1}) f|_k M(\tau) = f|_k M(\tau) \end{aligned}$$

Also ist $f|_k M$ periodisch mit der Periode n.
Da $f|_k M \in \mathbb{M}(M^{-1}\Lambda M, \chi_M)$ gilt, ist es mit (MK.1) holomorph auf $\mathbb{H}$.

Wegen $f \in \mathbb{M}(\Lambda, \chi)$ und (MK.3) ist $f|_k M$ auch bei ∞ holomorph.
Definieren wir

$$g(\tau) := f|_k M(n\tau),$$

so überträgt sich die Holomorphie auf $\mathbb{H}$ und bei ∞ auf g. Zudem gilt:

$$g(\tau+1) = f|_k(n \cdot (\tau+1)) = f|_k(n\tau + n) = f|_k(n\tau) = g(\tau).$$

Also ist g periodisch mit Periode 1. Aus der Funktionentheorie[6] folgt nun sowohl die Existenz und Eindeutigkeit der FOURIER-Entwicklung von g und somit auch $f|_k M$ als auch die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz auf der Menge

$$S := \{\tau \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Im}\tau \geq \varepsilon\}.$$

Daraus folgt bereits die absolut gleichmäßige Konvergenz auf S. Betrachte dazu die Menge

$$A := \{\tau \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \mathrm{Re}\ \tau \leq n,\ \varepsilon \leq \mathrm{Im}\ \tau \leq 1\}.$$

Diese Menge ist kompakt und somit konvergiert die FOURIER-Reihe auf A absolut gleichmäßig.
Nehmen wir nun die Menge

$$B := \{\tau \in \mathbb{H} \mid \varepsilon \leq \mathrm{Im}\ \tau \leq 1\}.$$

Dann gibt es für jedes $\tau \in B$ ein $z_\tau \in \mathbb{Z}$ mit $\tau + nz_\tau \in A$. Da $f|_k M$ periodisch ist mit Periode n gilt nun $f|_k M(\tau) = f|_k M(\tau + nz_\tau)$, also konvergiert die FOURIER-Reihe auf B absolut gleichmäßig.
Sei nun

$$C := \{\tau \in S \mid \mathrm{Im}\ \tau \geq 1\}.$$

Dann gilt für die FOURIER-Reihe an der Stelle $\tau \in C$:

$$\begin{aligned}
|f|_k M(\tau)| &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M) e^{\frac{2\pi i m \tau}{n}} \right| \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left| \alpha_f(m; M) e^{\frac{2\pi i m\ Re(\tau)}{n}} e^{-\frac{2\pi m\ Im(\tau)}{n}} \right| = \sum_{m=0}^{\infty} \left| \alpha_f(m; M) e^{-\frac{2\pi m\ Im(\tau)}{n}} \right| \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left| \alpha_f(m; M) e^{-\frac{2\pi m}{n}} \right| < \infty,
\end{aligned}$$

da die FOURIER-Reihe am Punkt $i \in A$ absolut konvergiert. Also konvergiert die FOURIER-Reihe für alle $\tau \in S = B \cup C$ absolut gleichmäßig.

[6] zum Beispiel Satz V(4.3) im Skript "Funktionentheorie I" [Kri13]

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $L \in \Lambda$ gilt:

$$\alpha_f(m; LM) = \chi(L)\alpha_f(m; M)$$

Sei also $L \in \Lambda$ beliebig. Dann gilt mit $f \in \mathbb{M}(\Lambda, \chi)$:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; LM) e^{\frac{2\pi i m\tau}{n}} &= f|_k(LM)(\tau) \overset{(2.17)}{=} (f|_k(L))\,\big|_k M(\tau) \overset{(MK.2)}{=} \chi(L) f|_k M(\tau) \\ &= \chi(L) \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M) e^{\frac{2\pi i m\tau}{n}} = \sum_{m=0}^{\infty} \chi(L)\alpha_f(m; M) e^{\frac{2\pi i m\tau}{n}}\end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeit der FOURIER-Entwicklung gilt nun für alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\alpha_f(m; LM) = \chi(L)\alpha_f(m; M),$$

also folgt die Behauptung. $\square$

§ 4 Dimensionsabschätzung für positives Gewicht

(4.1) Lemma
Sei Λ^* Untergruppe einer Gruppe Γ mit endlichem Index ℓ. Ist $M \in \Gamma$ und $M_1, ..., M_\ell$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Γ nach Λ^*, d.h.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Lambda^* M_j$$

und

$$\Lambda^* M_i \ \cap \ \Lambda^* M_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

so ist auch $M_1 M, ..., M_m M$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen. ◇

Beweis
Da $M \in \Gamma$ ist, gibt es ein $m \in \{1, ..., \ell\}$ und ein $L \in \Lambda^*$ mit $M = LM_m$.
Sei $K \in \Gamma$ beliebig. Da Γ eine Gruppe ist, existiert $M^{-1} \in \Gamma$ und es gilt $KM^{-1} \in \Gamma$.
Als Vertretersystem von Γ muss es also ein $k \in \{1, ..., \ell\}$ und ein $L_k \in \Lambda^*$ geben mit $KM^{-1} = L_k M_k$. Dann folgt

$$K = L_k M_k M.$$

Da $K \in \Gamma$ beliebig war, gilt daher

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Lambda^* M_j M$$

Da M invertierbar ist und $\Lambda^* M_i \ \cap \ \Lambda^* M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt zudem

$$\Lambda^* M_i M \ \cap \ \Lambda^* M_j M = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

also ist $M_1 M, ..., M_\ell M$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Γ nach Λ^*.□

(4.2) Lemma
Seien $k \in \mathbb{N}$, Λ eine Kongruenzgruppe, χ ein abelscher Charakter mod n von Λ. Sei

$$\Lambda^* := \{L \in \Lambda \mid \chi(L) = 1\} \subseteq \Gamma.$$

Ist $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$, so gilt $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda^*)$. ◇

Beweis
Da χ ein abelscher Charakter mod n von Λ ist, gilt $\chi(L) = 1$ für alle $L \in \Gamma[n]$, also insbesondere $\Gamma[n] \subseteq \Lambda^*$ und somit ist Λ^* eine Kongruenzgruppe von Γ.

Als nächstes zeigen wir, dass wir f als Element von $\mathbb{M}_k(\Lambda^*)$ auffassen können. Dazu überlegen wir uns, weil $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ ist, dass mit (MK.2) aus (2.7) für alle $L \in \Lambda$ gilt:

$$f|_k L = \chi(L) f$$

Also gilt für alle $L^* \in \Lambda^* \subseteq \Lambda$ mit der Definition von Λ^*:

$$f|_k L^* = \chi(L^*) f = f.$$

Da sich (MK.1) und (MK.3) aus (2.7) nicht ändern, und nun (MK.2) für Λ^* und den trivialen Charakter gezeigt wurde, gilt $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda^*)$. □

(4.3) Lemma
Seien $k \in \mathbb{N}$, Λ, χ, Λ^* wie in (4.2) und

$$\ell := [\Gamma : \Lambda^*].$$

Sei $M_1, ..., M_\ell$ das Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Λ^* nach Γ.
Zu $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ und $M \in \Gamma$ definieren wir

$$\pi(f) := \prod_{j=1}^{\ell} f|_k M_j.$$

Dann gilt $\pi(f) \in \mathbb{M}_{\ell k}$. ◇

Beweis
Mit (2.3) hat Λ^* in Γ einen endlichen Index, also ist ℓ wohldefiniert und es gibt ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Λ^* nach Γ, das wir mit $M_1, ..., M_\ell$ bezeichnen.
Mit (2.18) wissen wir, dass die $f|_k M_j \in \mathbb{M}_k(M_j^{-1} \Lambda M_j, \chi_{M_j})$ sind, also insbesondere mit (2.7) holomorph auf $\mathbb{H}$. Damit ist auch ihr endliches Produkt $\pi(f)$ holomorph auf $\mathbb{H}$ und erfüllt (MK.1).
Des weiteren wissen wir, dass $\left(f|_k M_j\right)|_k M$ bei ∞ holomorph ist für alle $M \in \Gamma$. Wegen

$$\begin{aligned}\pi(f)|_{\ell k} M(\tau) &= \left(\prod_{j=1}^{\ell} f|_k M_j\right)\Bigg|_{\ell k} M(\tau) = (c\tau + d)^{-\ell k} \left(\prod_{j=1}^{\ell} f|_k M_j\right)(M\tau) \\ &= \prod_{j=1}^{\ell} (c\tau + d)^{-k} f|_k M_j(M\tau) = \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k M_j)|_k M(\tau)\end{aligned}$$

ist auch $\pi(f)|_{\ell k} M$ bei ∞ holomorph, also gilt (MK.3).

Um (MK.2) zu beweisen, nehmen wir wiederum ein beliebiges $M \in \Gamma$.
Zunächst gilt mit (4.1), dass $M_1 M, ..., M_\ell M$ auch ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Γ nach Λ^* ist. Also gibt es für jedes $j \in \{1, ..., \ell\}$ ein $L_j \in \Lambda^*$ und genau ein $n_j \in \{1, ..., \ell\}$ mit $M_j M = L_j M_{n_j}$. Dann gilt wie oben:

$$\begin{aligned}\pi(f)|_{\ell k} M(\tau) &= \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k M_j)|_k M(\tau) \overset{(2.17)}{=} \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k M_j M)(\tau) = \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k L_j M_{n_j})(\tau) \\ &= \prod_{j=1}^{\ell} ((f|_k L_j)|_k M_{n_j})(\tau) \overset{(*)}{=} \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k M_{n_j})(\tau) = \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k M_j)(\tau) = \pi(f)(\tau)\end{aligned}$$

Dabei gilt $(*)$, da wir dank (4.2) wissen, dass $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda^*)$
Also folgt für $L_j \in \Lambda^*$ mit (MK.2) die Gleichung $(f|_k L_j) = f$.
Somit erfüllt $\pi(f)$ (MK.2) und es gilt $\pi(f) \in \mathbb{M}_{\ell k}$. □

(4.4) Satz
Sei $f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ und $M_1, ..., M_\ell$ das Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Λ^* nach Γ. Außerdem seien $k \in \mathbb{N}$, Λ, χ, Λ^*, ℓ und π wie in (4.3).
Falls es ein $M \in \Gamma$ gibt mit

$$\alpha_f(m; M) = 0 \text{ für } 0 \leq m \leq \frac{\ell k n}{12},$$

so folgt $f = 0$. ◇

Beweis
Da die M_j ein Vertretersystem sind, gibt es ein $L \in \Lambda^*$ und ein $j' \in \{1, ..., \ell\}$ (sei ohne Einschränkung $j' = 1$), so dass

$$LM_1 = M, \text{ also } M_1 = L^{-1} M,$$

wobei $L^{-1} \in \Lambda^* = \{L \in \Lambda \mid \chi(L) = 1\}$, also $\chi(L^{-1}) = 1$. Dann gilt wegen (3.1):

$$\alpha_f(m; M_1) = \alpha_f(m; L^{-1} M) = \chi(L^{-1}) \alpha_f(m; M) = \alpha_f(m; M), \tag{1}$$

Aus der Funktionentheorie[7] kennen wir die FOURIER-Entwicklung für ganze Funktionen wie $\pi(f) \in \mathbb{M}_{\ell k}$ (siehe (4.3)) als:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{\pi(f)}(m) e^{2\pi i m \tau} = \pi(f)(\tau).$$

[7] zum Beispiel S.312, vor XII(1.3), im Skript "Funktionentheorie II" [Kri13]

Also überlegen wir uns:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{\pi(f)}(m) e^{2\pi i m\tau} = \pi(f)(\tau) = \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k M_j)(\tau) = \prod_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m; M_j) e^{\frac{2\pi i m\tau}{n}} \right)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i m\tau}{n}} \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_\ell)\in\mathbb{N}_0^\ell \\ m_1+\dots+m_\ell=m}} \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_f(m_j; M_j).$$

Mit der Eindeutigkeit der FOURIER-Entwicklung aus (3.1) gilt also für alle $r \neq mn$:

$$0 = \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_\ell)\in\mathbb{N}_0^\ell \\ m_1+\dots+m_\ell=r}} \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_f(m_j; M_j)$$

und für alle $0 \leq m \leq \frac{\ell k}{12}$:

$$\alpha_{\pi(f)}(m) = \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_\ell)\in\mathbb{N}_0^\ell \\ m_1+\dots+m_\ell=mn}} \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_f(m_j; M_j)$$
$$= \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_\ell)\in\mathbb{N}_0^\ell \\ m_1+\dots+m_\ell=mn}} \alpha_f(m_1; M_1) \prod_{j=2}^{\ell} \alpha_f(m_j; M_j).$$
$$\overset{(1)}{=} \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_\ell)\in\mathbb{N}_0^\ell \\ m_1+\dots+m_\ell=mn}} \alpha_f(m_1; M) \prod_{j=2}^{\ell} \alpha_f(m_j; M_j).$$

Da aber für alle $(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell$ mit $m_1 + \dots + m_\ell = mn$ gilt:

$$0 \leq m_1 \leq mn \leq \frac{\ell k n}{12},$$

wissen wir nach Vorraussetzung, dass $\alpha_f(m_1; M) = 0$, also gilt auch $\alpha_{\pi(f)}(m) = 0$.

Da $\pi(f) \in \mathbb{M}_{\ell k}$, folgt nun aus der Funktionentheorie[8], dass $\pi(f) = 0$ ist.
Wegen $\pi(f) = \prod_{j=1}^{\ell} (f|_k M_j)(\tau)$ heißt das, dass es ein $i \in \{1, \dots, \ell\}$ und eine nicht diskrete Teilmenge $U \subseteq \mathbb{H}$ gibt mit $f|_k M_i(\tau) = 0$ für $\tau \in U$.

[8] zum Beispiel Satz XII(4.7) im Skript "Funktionentheorie II" [Kri13]

Dann ist jedoch auch $U_{M_i} := \{M_i\tau \mid \tau \in U\}$ nicht diskret (da $M \in \Gamma$). Das heißt es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f|_k M_i(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(M_i\tau) \\ \Leftrightarrow 0 &= f(M_i\tau) \end{aligned}$$

auf einer nicht diskreten Menge, also folgt mit dem Identitätssatz[9] bereits $f = 0$. $\square$

(4.5) Korollar
Seien $k \in \mathbb{N}$, Λ, χ und ℓ wie in (4.4). Dann gilt:

$$\dim \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi) \leq \left[\frac{\ell kn}{12}\right] + 1$$

Beweis
Seien $f_0, ..., f_{\left[\frac{\ell kn}{12}\right]+1} \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$, $M \in \Gamma$ und $c_0, ..., c_{\left[\frac{\ell kn}{12}\right]+1} \in \mathbb{R}$ mit $c_j \neq 0$ für ein $j \in \left\{0, ..., \left[\frac{\ell kn}{12}\right] + 1\right\}$ so, dass sie das Homogene Lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{\ell kn}{12}\right]+1} c_j \alpha_{f_j}(m; M) = 0$$

für alle $0 \leq m \leq \frac{\ell kn}{12}$ lösen.
Definieren wir

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{\ell kn}{12}\right]+1} c_j f_j =: f \in \mathbb{M}_k(\Lambda, \chi).$$

Dann folgt wegen der Wahl der c_j und der Eindeutigkeit der FOURIER-Entwicklung bereits $\alpha_f(m; M) = 0$ für alle $0 \leq m \leq \frac{\ell kn}{12}$. Mit (4.4) ist also $f = 0$ und daher sind die $f_0, ..., f_{\left[\frac{\ell kn}{12}\right]+1}$ linear abhängig. Es kann in $\mathbb{M}_k(\Lambda, \chi)$ somit höchstens $\left[\frac{\ell kn}{12}\right] + 1$ linear unabhängige Elemente geben. $\square$

(4.6) Bemerkung
Eine exakte Dimensionsbestimmung mit den bisher angewanten Methoden ist bisher nicht bekannt. $\diamond$

[9] zum Beispiel Satz III(3.9) im Skript "Funktionentheorie I" [Kri10]

Literatur

[BvdGHZ08] Jan Hendrik Bruiner, Gerard van der Geer, Günter Harder, and Don Zagier. *The 1-2-3 of Modular Forms*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

[KK98] Aloys Krieg and Max Koecher. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[Kri10] Aloys Krieg. *Funktionentheorie I*. Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Aachen, 2010.

[Kri13] Aloys Krieg. *Funktionentheorie II*. Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen, Aachen, 2013.