Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 23. Oktober 2013

2. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 30. Oktober 2013, 16:00 Uhr

Aufgabe 5 Es sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{2\}, (0,2], [2,4], (0,4], \mathbb{R}\}$. Geben Sie für alle $x \in \{1,2,3,4\}$ die Menge $\mathcal{U}_x$ der Umgebungen von x an (bez. $\mathfrak{T}$, ohne Beweis). Ein Nachweis der Topologie-Eigenschaften ist nicht notwendig.

Aufgabe 6 Es seien die Mengen $M_1 = \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, $M_2 = (-1,1)$ und $M_3 = \mathbb{Z}$ gegeben. Geben Sie M_j°, $\overline{M_j}$ und ∂M_j an für alle $j \in \{1,2,3\}$ in den topologischen Räumen

(a) $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\text{nat}})$,

(b) $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_1)$ mit $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, (0,2], \{2\}, [2,4], (0,4], \mathbb{R}\}$ (vgl. Aufgabe 5) und

(c) $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_2)$, wo $\mathfrak{T}_2$ die von der Basis $\mathfrak{B} = \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$ erzeugte Topologie ist. Es ist $\mathfrak{T}_2 = \{A \subset \mathbb{R} : \forall a \in A :\ a + \mathbb{Q} \subset A\}$.

Algebraisch gesehen ist $\mathfrak{B} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (wo die additive Gruppe $\mathbb{R}$ modulo ihrem Normalteiler $\mathbb{Q}$ gemeint ist).

Ein Nachweis der Topologie-Eigenschaften ist nicht notwendig. Als Antwort reicht je eine Tabelle aus.

Aufgabe 7 Es seien A und B Teilmengen des topologischen Raumes $(X, \mathfrak{T})$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\overline{A}^\circ} \subset \overline{A}$ und $\overline{A^\circ}^\circ \supset A^\circ$,

(b) $\overline{\overline{A}^\circ}^\circ = \overline{A}^\circ$ und $\overline{\overline{A^\circ}^\circ} = \overline{A^\circ}$.

(c) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$. Gilt auch Gleichheit? Beweisen oder widerlegen Sie $\overline{A} \setminus \overline{B} \supset \overline{A \setminus B}$.