Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 30. Oktober 2013

3. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 6. November 2013, 16:00 Uhr

Aufgabe 8 Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hat in der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$ keine abzählbare Umgebungsbasis.

Aufgabe 9 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n \in \mathbb{C}$. Für $1 \leq p < \infty$ sei $\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ und $\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p < \infty\right\}$ (siehe Skript Beispiel 1.1.6 (b)). Zeigen Sie:

(a) Die normierten Räume $\ell^p(\mathbb{N})$ sind separabel für $1 \leq p < \infty$.

(b) Der normierte Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel.

Hinweis: Betrachten Sie Kugeln mit Radius 1 um Folgen mit Werten ± 1.

Aufgabe 10 (a) Zeigen Sie: Die Sorgenfrey-Topologie besitzt keine abzählbare Basis.

(b) Folgern Sie: Die Sorgenfrey-Topologie ist nicht pseudometrisierbar.