Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 6. November 2013

4. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 13. November 2013, *15:00 Uhr*

Aufgabe 11 Die Menge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sei mit der folgenden Topologie $\mathfrak{T}$ versehen:

Für $x \neq (0,0)$ sei $\mathfrak{F}_x$ der Umgebungsfilter der diskreten Topologie, der Filter $\mathfrak{F}_{(0,0)}$ bestehe aus den Mengen A mit den Eigenschaften $(0,0) \in A$ und $M_m = \{n \in \mathbb{N}_0 : (n,m) \notin A\}$ endlich für fast alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Topologie, in der $\mathcal{U}_x = \mathfrak{F}_x$ ist.

(b) Es gibt keine Folge in $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \setminus \{(0,0)\}$, die gegen $(0,0)$ konvergiert.

(c) Es gibt eine Folge in $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \setminus \{(0,0)\}$, die $(0,0)$ als Häufungspunkt besitzt.

Insbesondere ist $(0,0)$ nicht Limes einer Teilfolge.

Aufgabe 12 Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

Zeigen Sie die Abgeschlossenheit folgender Mengen:

(a) Die Menge der Berührpunkte eines Filters $\mathfrak{F}$ auf X.

(b) Die Menge der Häufungspunkte eines Netzes $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in X.

Aufgabe 13 Man beweise: Erfüllt ein topologischer Raum X das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so enthält jede Basis von X eine abzählbare Basis.