LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 13. November 2013

5. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 20. November 2013, 16:00 Uhr

Aufgabe 14 Es sei $X = [0, 1]$. Das System

$$\mathfrak{T} = \{A \subset X : X \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist eine Topologie auf X. Es bezeichne $\mathfrak{T}_{\text{nat}}$ die euklidische Topologie auf X und:

$$f : (X, \mathfrak{T}) \to (X, \mathfrak{T}_{\text{nat}}), x \mapsto x$$

Beweisen Sie:

Die Funktion f ist nicht stetig, obwohl die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für jede in $(X, \mathfrak{T})$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Insbesondere genügt $(X, \mathfrak{T})$ nicht dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 15 Es sei $(Y, \mathfrak{T}|\, Y)$ ein Unterraum von $(X, \mathfrak{T})$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{T}$, dann ist $\mathfrak{B}_{\text{rel}} = \{B \cap Y \subset Y : B \in \mathfrak{B}\}$ eine Basis von $\mathfrak{T}|\, Y$.

(b) Ist $\mathfrak{B}_y$ eine Umgebungsbasis von $y \in Y$ bez. $\mathfrak{T}$, dann ist $\mathfrak{B}_{\text{rel},y} = \left\{B \cap Y \subset Y : B \in \mathfrak{B}_y\right\}$ eine Umgebungsbasis von y bezüglich $\mathfrak{T}|\, Y$.

(c) Die Eigenschaft, das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom zu erfüllen ist erblich, d. h. wenn $(X, \mathfrak{T})$ das erste (bzw. zweite) Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann erfüllt auch $(Y, \mathfrak{T}|\, Y)$ das erste (bzw. zweite) Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 16 Es sei (X, d) ein pseudometrischer Raum. Für $x \in X$ und $\emptyset \neq A \subset X$ sei $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Beweisen Sie:

(a) Für jede Teilmenge $A \subset X$ ist die Funktion

$$X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$$

stetig bezüglich der durch die Pseudometrik d definierten Topologie.

(b) Es gilt $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.