Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 20. November 2013

6. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 27. November 2013, 16:00 Uhr

Aufgabe 17 (Zusammenkleben topologischer Räume) Es seien X, Y disjunkte topologische Räume, $Z = X \cup Y$ versehen mit der Summentopologie, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to Y$ stetig. Es sei $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation auf Z mit den Klassen:

$$\{x\}, x \notin A; \{y\}, y \notin f(A); f^{-1}(f(x)) \cup \{f(x)\}, x \in A$$

Der Quotientenraum Z/R mit der Quotiententopologie wird der *durch Zusammenkleben von X und Y mit f* entstandene Raum genannt und mit $X \cup_f Y$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie für die kanonische Projektion $p : Z \to X \cup_f Y$: Es ist $p(Y)$ abgeschlossen, $p(X \backslash A)$ offen und die Einschränkungen von p auf Y und auf $X \backslash A$ sind Homöomorphismen.

(b) Es seien $X = [0,1]$, $Y = \{y_0\}$, $A = \{0,1\}$, $f(0) = f(1) = y_0$. Dann ist $X \cup_f Y$ homöomorph zum Torus $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ in der euklidischen Topologie.

Aufgabe 18 (a) Es seien $\mathfrak{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, pseudometrische Topologien auf X. Zeigen Sie: Dann ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{T}_n$ pseudometrisch.

Hinweis: Man betrachte $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)}$.

(b) Es seien X_i, $i \in I$, topologische Räume und $|X_i| \geq 2$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie: Der Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist metrisierbar genau dann, wenn I abzählbar und X_i metrisierbar für alle $i \in I$ ist.

Aufgabe 19 Es seien I eine Indexmenge, X eine Menge, $p_i : X \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen auf topologische Räume $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ und $\mathfrak{T}$ die zugehörige Initialtopologie auf X.

Ferner seien $R = \{(x,y) \in X \times X : p_i(x) = p_i(y) \forall i \in I\}$ und der Faktorraum X/R mit der Quotiententopologie versehen. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\iota : X/R \to \Pi_{i \in I} X_i, xR \mapsto (p_i(x))_{i \in I}$$

ist ein Homöomorphismus auf $\iota(X/R)$ versehen mit der von der Produkttopolgie induzierten Topologie.