Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 27. November 2013

7. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 4. Dezember 2013, 16:00 Uhr

Aufgabe 20 Es seien X ein topologischer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X/R$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

(a) Ist X/R ein Hausdorff-Raum, dann ist R abgeschlossen in $X \times X$.

(b) Ist die kanonische Projektion $\pi : X \to X/R$ offen, so ist X/R genau dann hausdorffsch, wenn R abgeschlossen in $X \times X$ ist.

(c) Es ist X genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 21 Es sei (X, d_X) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Der Raum X ist beschränkt, d. h. es gilt $d_X(a, b) \leq M$ für alle $a, b \in X$ für eine feste Schranke $M > 0$.

(b) Eine stetige Funktion $f : X \to (Y, d_Y)$ ist *gleichmäßig stetig*, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, für das $d_Y\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < \varepsilon$, falls $d_X\left(x, y\right) < \delta$ für $x, y \in X$ ist.

Aufgabe 22 Es seien $(X_i, \mathfrak{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Zeigen Sie: Mit der Produkttopologie ist $\prod_{i \in I} X_i$ hausdorffsch genau dann, wenn $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ hausdorffsch für alle $i \in I$ sind.

Aufgabe 23 Es sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ kompakt, $U \in \mathcal{U}_A$. Zeigen Sie:

Die Umgebung U ist *gleichmäßig*, d. h. es gibt ein festes $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon\left(x\right) \subset U$ für alle $x \in A$.