Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 4. Dezember 2013

8. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 11. Dezember 2013, 16:00 Uhr

Aufgabe 24 Es seien X eine Menge, $\beta X_d := \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \text{ Ultrafilter auf } X\}$ und $B(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}$. Für alle $f \in B(X)$, $\mathfrak{F} \in \beta X_d$ sei $\widehat{f}(\mathfrak{F}) := \lim f(\mathfrak{F})$. Durch $\iota : X \to \beta X_d$, $x \mapsto D_x$ wird X auf eine Teilmenge von βX_d abgebildet, wobei D_x der Punktfilter aller Obermengen von $x \in X$ sei. Es sei $\mathfrak{T}$ die Initialtopologie auf βX_d, die durch die Abbildungen $\widehat{f}, f \in B(X)$, erzeugt wird. Beweisen Sie:

(a) Für alle $f \in B(X)$, $\mathfrak{F} \in \beta X_d$ ist $\widehat{f}(\mathfrak{F})$ wohldefiniert und $\overline{f(X)} = \left\{\widehat{f}(\mathfrak{F}) : \mathfrak{F} \in \beta X_d\right\}$.

(b) Es ist $\iota(X)$ diskret.

(c) Der Raum $(\beta X_d, \mathfrak{T})$ ist hausdorffsch, kompakt und $\beta X_d = \overline{\iota(X)}^{\mathfrak{T}}$

(*Hinweis*: Satz von Tychonov.)

Aufgabe 25 Zeigen Sie: Das Produkt abzählbar vieler folgenkompakter Räume ist wieder folgenkompakt in der Produkttopologie.

Aufgabe 26 Folgern Sie den Satz von Tychonov aus dem Satz von Alexander.

Aufgabe 27 Es sei $X = (0,1)$ und $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, $U_n = (0, 1-1/n)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Zeigen Sie:

(a) Das Mengensystem $\mathfrak{T}$ ist eine Topologie auf X.

(b) Jede offene Teilmenge verschieden von X ist kompakt.

(c) Keine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge von X ist kompakt.