Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 11. Dezember 2013

9. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 18. Dezember 2013, *15:00 Uhr*

Aufgabe 28 Es seien X eine Menge, $\beta X_d = \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \text{ Ultrafilter auf } X\}$ und $B(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}$. Nach Aufgabe 24 existiert $\widehat{f}(\mathfrak{F}) = \lim \langle f(\mathfrak{F}) \rangle$ für alle $f \in B(X)$, $\mathfrak{F} \in \beta X_d$, durch $\iota : X \to \beta X_d$, $x \mapsto D_x$ wird X auf eine Teilmenge von βX_d abgebildet und $\mathfrak{T}$ sei die Initialtopologie auf βX_d, die durch die Abbildungen $\widehat{f}, f \in B(X)$, erzeugt wird. Zeigen Sie:

Ist $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung in einen kompakten Hausdorff-Raum Y mit $\overline{\varphi(X)} = Y$, so existiert genau eine stetige Abbildung $\widetilde{\varphi} : \beta X_d \to Y$ mit $\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$.

Aufgabe 29 (Intervallschachtelungsprinzip) In einem metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

(a) Der Raum (X, d) ist vollständig.

(b) Für alle monoton fallenden Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener, nichtleerer Teilmengen $A_n \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ gilt: Der Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ besteht aus genau einem Punkt. Dabei ist $\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$ für $B \subset X$.

Aufgabe 30 Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge und $y \in X$ ein Punkt. Gibt es einen Punkt $a \in A$ mit $d(y, a) = \inf\{d(y, b) : b \in A\}$, wenn:

(a) Die Menge A kompakt ist?

(b) Die Menge A abgeschlossen ist? (Betrachte z. B. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

(c) $X = \mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Metrik und A abgeschlossen ist?