Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 18. Dezember 2013

10. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 8. Januar 2013, 16:00 Uhr

Aufgabe 31 Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\infty \notin X$. Es sei $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ und $\widehat{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T} \cup \left\{\widehat{X} \setminus K : K \text{ kompakt}\right\}$. Zeigen Sie:

(a) Mit $\widehat{\mathfrak{T}}$ ist $\widehat{X}$ ein kompakter Hausdorff-Raum.

(b) Die Relativtopologie auf $X \subset \widehat{X}$ ist $\mathfrak{T}$.

(c) Genau dann ist X dicht in $\widehat{X}$, wenn X nicht kompakt ist.

Aufgabe 32 Es sei $C^\infty([0,1])$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit der Metrik:

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{2^{-n}, ||f^{(n)} - g^{(n)}||_\infty\right\}$$

Zeigen Sie:

(a) Der Raum $C^\infty([0,1])$ ist metrisch und vollständig.

(b) Die Menge der Funktionen $f \in C^\infty([0,1])$, die an irgendeiner Stelle $b \in (0,1)$ analytisch sind, ist in

$$\bigcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1], c \in \mathbb{N}} T(a,c)$$

mit

$$T(a,c) = \{f \in C^\infty([0,1]) : |f^{(k)}(a)| \le k! c^k \forall k \in \mathbb{N}\}$$

enthalten. Jedes $T(a,c)$ ist nirgends dicht.

Somit ist die Menge der Funktionen, die an einer Stelle $b \in (0,1)$ analytisch sind, eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen.

Hinweis: Sie können für eine in $a \in (0,1)$ analytische Funktion $f \in C^\infty([0,1])$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{(|f^{(k)}(a)|/k!)^{(1/k)}\right\} = c < \infty$$

verwenden.

(c) Die Menge der Funktionen in $C^\infty([0,1])$, die an keiner Stelle analytisch sind, ist keine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen.