



11. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 22. Januar 2014, 16:00 Uhr

Aufgabe 33 Zeigen Sie:

- (a) Der topologische Raum $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ mit der Topologie \mathfrak{T} mit der Basis

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{T}_{\text{nat}} \cup \{(a, +\infty) \cup \{+\infty\} : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \cup \{-\infty\} : b \in \mathbb{R}\}$$

ist normal und regulär.

- (b) Die obere Halbebene $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ mit der Topologie \mathfrak{T} mit der Basis

$$\mathfrak{B} = \left\{ B_r^d(x, y) : (x, y) \in H, 0 < r \leq y \right\} \cup \left\{ B_r^d(x, r) \cup \{(x, 0)\} : x \in \mathbb{R}, r > 0 \right\}$$

ist regulär, aber nicht normal, wobei d die euklidische Metrik auf $H \subset \mathbb{R}^2$ ist.

- (c) Für X überabzählbar und $\mathfrak{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ abzählbar}\}$, die koabzählbare Topologie auf X , ist der topologische Raum (X, \mathfrak{T}) weder normal noch regulär.

Aufgabe 34 Zeigen Sie:

- (a) Genau dann ist (X, \mathfrak{T}) ein (T_1) -Raum, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ und jeden Häufungspunkt x von A in jeder Umgebung von x unendlich viele Punkte von A liegen.
- (b) (X, \mathfrak{T}) ist (T_2) -Raum $\Leftrightarrow \{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{U}$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 35 (Beispiel für: Ein (T_2) -Raum erfüllt nicht notwendigerweise das Trennungsaxiom (T_3) und ist somit auch nicht regulär.)

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei \mathfrak{B}_x die Familie aller offenen Intervalle, die x enthalten, und \mathfrak{B}_0 sei die Familie aller Mengen der Form:

$$U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (\varepsilon > 0)$$

Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}$ ist \mathfrak{B}_x Basis eines Filters \mathfrak{F}_x , es gibt eine Topologie \mathfrak{T} auf \mathbb{R} mit $\mathcal{U}_x = \mathfrak{F}_x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$ ist (T_2) -, aber kein (T_3) -Raum. (Betrachte $x = 0$.)