Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 22. Januar 2014

12. Übung zur Vorlesung Topologie

Wird besprochen am Mittwoch, den 29. Januar 2014, 16:00 Uhr

Aufgabe 36 Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge A eines lokalkompakten T_2-Raumes X ist genau dann lokalkompakt, wenn sie offen in ihrem Abschluß ist.

(b) (Urysohns Lemma für lokalkompakte Räume.) Es seien X lokalkompakt, $K \subset X$ kompakt und $V \supseteq K$ offen. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f|_K \equiv 1$, $f|_{\complement V} \equiv 0$.

(*Hinweis*: Betrachten Sie die Einpunktkompaktifizierung von X, siehe Aufgabe 31.)

Aufgabe 37 Es sei X ein normaler topologischer Raum. Es seien $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 1$, abgeschlossene Teilmengen von X mit der Eigenschaft

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset.$$

Zeigen Sie: Es gibt offene Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ von X mit

$$A_k \subset U_k, 1 \leq k \leq n, \bigcap_{k=1}^{n} U_k = \emptyset.$$

Aufgabe 38 Es seien X, Y normale Räume und $\varphi : X \to Y$ stetig. Die Abbildung φ^* sei durch $\varphi^* : C(Y, \mathbb{C}) \to C(X, \mathbb{C})$, $f \mapsto f \circ \varphi$ definiert. Beweisen Sie:

$\varphi^*(X)$ dicht in $Y \Leftrightarrow \varphi^*$ injektiv. (*Hinweis*: Lemma von Urysohn!)