Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 17. Oktober 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 1

Wird besprochen am Freitag, den 24. Oktober 2014

Aufgabe 1 Es sei $U \subset X$, $x \in X$, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Zeigen Sie:

(a) $\overline{U} = \overline{\overline{U}}$. Speziell ist U abgeschlossen genau dann, wenn $U = \overline{U}$.

(b) $x \in \overline{U} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}_x : U \cap V \neq \emptyset$.

(c) Ist $\mathcal{T}$ von einer Metrik d induziert, so gilt: $x \in \overline{U} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (bez. d).

(d) U liegt dicht in X genau dann, wenn für alle $\emptyset \neq V \in \mathcal{T}$ gilt: $U \cap V \neq \emptyset$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie:

(a) f stetig $\Leftrightarrow \forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}_{f(x)} \exists V \in \mathcal{U}_x$ mit $f(V) \subset U$.

(b) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetig $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ stetig.

(c) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig auf X, genau dann wenn $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle $A \subset X$ gilt.

(d) Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Surjektion. Ist $D \subset X$ eine dichte Teilmenge von X, so ist $f(D)$ dicht in Y.

Aufgabe 3 (a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Produkttopologie zweier topologischer Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ besteht aus allen kartesischen Produkten von Mengen aus $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$.

(b) Es sei $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ versehen mit der durch die Metrik in Beispiel 0.5 (1) induzierte Topologie. Zeigen Sie: Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ stimmt mit der auf $\mathbb{R}^2$ durch die Metrik induziert Topologie überein.