Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 24. Oktober 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 2

Wird besprochen am Freitag, den 31. Oktober 2014

Aufgabe 4 Es sei X ein lokalkompakter topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{T}$. Es sei $X^* = X \cup \{\infty\}$, dabei $\infty \notin X$. Wir definieren $\mathcal{T}^*$ als die Menge der Teilmengen $U \subset X^*$, für die gilt:

- $\infty \in U$ und $X \setminus U \subset X$ ist kompakt oder
- $\infty \notin U$ und $U \subset X$ ist offen in X.

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{T}^*$ ist eine Topologie, mit $\mathcal{T}^*|X = \mathcal{T}$.

(b) $(X^*, \mathcal{T}^*)$ ist kompakt.

(c) $f \in C(X, \mathbb{C})$ besitzt genau dann eine stetige Fortsetzung $f^* : X^* \to \mathbb{C}$, wenn $f = f_0 + c$, mit $f_0 \in C_0(X, \mathbb{C})$ und $c \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Der topologische Raum X^* heißt *Alexandroff-Kompaktifizierung* oder *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.

Aufgabe 5 Es sei X lokalkompakt und $\mathcal{A} \subset C_0(X, \mathbb{C})$ eine bezüglich $\|\cdot\|_u$ abgeschlossene Unteralgebra mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{A}$ trennt die Punkte von X.
- Für alle $f \in \mathcal{A}$: $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie: Entweder $\mathcal{A} = C_0(X, \mathbb{C})$ oder es gibt $x_0 \in X$ mit $\mathcal{A} = \{f \in C_0(X, \mathbb{C}) : f(x_0) = 0\}$.

Aufgabe 6 (a) Es sei X ein topologischer Raum, $U \subset X$ offen und $A \subset X$ dicht.

Zeigen Sie: $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.

(b) Es sei X ein topologischer Hausdorff-Raum, $Y \subset X$ sei dicht und lokalkompakt in der Relativtopologie. Zeigen Sie: Y ist offen.

(c) Es sei X ein lokalkompakter topologischer Raum und $Y \subset X$.

Zeigen Sie: Y ist lokalkompakt in der Relativtopologie genau dann, wenn $Y = A \cap U$, mit A abgeschlossen und U offen.

Aufgabe 7 Es seien X, Y kompakte topologische Hausdorff-Räume und $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Es sei $\mathcal{A} \subset C(X \times Y, \mathbb{C})$ die Menge aller Funktionen vom Typ $F(x, y) = f(x)g(y)$, mit $f \in C(X, \mathbb{C})$ und $g \in C(Y, \mathbb{C})$. Es sei $\mathcal{B} = \operatorname{span}(\mathcal{A})$. Zeigen Sie: $\mathcal{B}$ ist dicht in $C(X \times Y, \mathbb{C})$.