



Harmonische Analysis, Übungsblatt 3

Wird besprochen am Freitag, den 7. November 2014

Aufgabe 8 Es seien G eine Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge. Es sei

$$\langle A \rangle = \bigcap \{H < G : A \subset H\}$$

die von A erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\langle A \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cup A^{-1})^n$.
- (b) Erfüllt A die Bedingung $\forall y \in A \forall x \in G : xyx^{-1} \in A$, folgt $\langle A \rangle \triangleleft G$.

Aufgabe 9 Es seien G eine topologische Gruppe und $H < G$.

- (a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
 - (i) Die Untergruppe H ist offen.
 - (ii) Es gibt $V \subset G$ offen in G und nicht leer mit $V \subset H$.
 - (iii) Es gilt $H \in \mathcal{U}_e$.

Die Gruppentopologie von G sei nun lokalkompakt. Zeigen Sie:

- (b) Dann enthält G eine offene σ -kompakte Untergruppe H .
- (c) Genau dann ist G σ -kompakt, wenn G/H abzählbar ist.
Dabei sei H die Untergruppe aus (b).

Aufgabe 10 Es sei G eine lokalkompakte und σ -kompakte topologische Gruppe.

Zeigen Sie:

- (a) Es existiert eine Folge kompakter Teilmengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von G , für die für alle $A \subset G$ gilt: A ist kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen ist und $A \subset K_n$, für ein $n \in \mathbb{N}$.

(Konstruktionshinweis: Es sei $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, mit A_n kompakt. Es sei $V \in \mathcal{U}_e$ kompakt. Dann ist $K_n = V^n \bigcup_{k \leq n} A_k$ wie gewünscht.)

- (b) Falls G nicht kompakt ist, existiert $U \in \mathcal{U}_e$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ mit

$$n < m \Rightarrow x_n U \cap x_m U = \emptyset .$$

Aufgabe 11 Es seien \mathcal{S} und \mathcal{T} zwei Gruppentopologien auf einer Gruppe G . Jede \mathcal{T} -dichte Teilmenge von G sei \mathcal{S} -dicht. Man zeige $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Zum Vergleich: Auf \mathbb{R} ist die übliche Topologie echt gröber als die Sorgenfrey-Topologie (welche von den Intervallen $[a, b)$ mit $a < b$ erzeugt wird), obgleich $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dieselben dichten Teilmengen besitzen.