Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 7. November 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 4

Wird besprochen am Freitag, den 14. November 2014

Aufgabe 12 Es sei G eine lokalkompakte Gruppe. Es sei weiterhin μ ein Radon-Maß auf G und $f \in \mathrm{L}^p(G, \mu)$, für $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie: Es gibt eine offene σ-kompakte Untergruppe $H < G$, mit der $f(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in G \setminus H$.

Aufgabe 13 Es seien X ein lokalkompakter und σ-kompakter Raum und μ ein Radon-Maß auf X. Es sei $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ Borel-meßbar.

(a) Zeigen Sie nur mit den Definitionen: Ist f stetig, so definiert

$$\nu(A) = \int_X \chi_A(x) f(x) d\mu(x) \tag{1}$$

ein Radon-Maß ν auf X.

(b) Zeigen Sie allgemeiner: Genau dann definiert (1) ein Radon-Maß ν, wenn f auf Kompakta integrierbar ist, d. h. für jede kompakte Menge $K \subset X$ gilt $\nu(K) < \infty$.

Aufgabe 14 Es sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus zwischen topologischen Gruppen G und H. Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist φ stetig, wenn er stetig beim neutralen Element ist.

(b) Genau dann ist φ offen, wenn für jede e-Umgebung $U \subset G$ das Bild $\varphi(U)$ eine e-Umgebung in H ist.

Aufgabe 15 Es sei G eine abzählbare lokalkompakte Gruppe. Zeigen Sie: Die Gruppe G trägt die diskrete Topologie. (*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst das linke Haarmaß von G.)

Aufgabe 16 Es sei $G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ versehen mit dem Produkt komplexer Zahlen. Es sei $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} < G$. Bestimmen Sie Haarintegrale auf H und G.