Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 14. November 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 5

Wird besprochen am Freitag, den 21. November 2014

Aufgabe 17 Es sei $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen versehen mit der Relativtopologie bezüglich der Inklusion $G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$. Es bezeichne $\mathrm{d}A$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: Durch

$$I(f) = \int_G f(A) \frac{\mathrm{d}A}{|\det(A)|^n}$$

ist ein linkes Haarintegral auf G gegeben. G ist unimodular.

Aufgabe 18 Es seien G eine topologische Gruppe, die nicht unimodular ist, und ν ein rechtes Haarmaß. Zeigen Sie $\mathrm{L}^p(G, \nu) \neq \mathrm{L}^p(G)$ für $p < \infty$.

Aufgabe 19 Es seien G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler. Es sei μ_N ein linkes Haarmaß von N. Für $f \in \mathcal{C}_c(G)$ sei $P_N(f) : G/N \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$P_N(f)(yN) = \int_N f(yx) d\mu_N(x) \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $P_N(f)$ ist wohldefiniert und $P_N(f) \in \mathcal{C}_c(G/N)$.

(b) Zu $g \in \mathcal{C}_c(G/N)$ mit $g \geq 0$ gibt es $f \in \mathcal{C}_c(G)$ mit $f \geq 0$ und $P_N(f) = g$. Insbesondere ist P_N surjektiv.
(*Hinweis*: Sie dürfen ohne Beweis folgende Aussage verwenden: Zu jedem $C \subset G/N$ kompakt existiert $D \subset G$ kompakt, für das $q_N(D) = C$. Dabei ist $q_N : G \to G/N$ die kanonische Abbildung.)

Aufgabe 20 Es seien G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler. Es seien μ_G und μ_N linke Haarmaße von G bzw. N.

(a) Zeigen Sie: Zu μ_N, μ_G gibt es genau ein linkes Haarmaß $\mu_{G/N}$, für das die *Weil'sche Integralformel* gilt. D. h. für alle $f \in \mathcal{C}_c(G)$ gilt

$$\int_G f(z) d\mu_G(z) = \int_{G/N} \int_N f(yx) d\mu_N(x) d\mu_{G/N}(yN) \ .$$

(b) Folgern Sie: Die Modularfunktion Δ_N ist die Einschränkung von Δ_G auf N.