Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 21. November 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 6

Wird besprochen am Freitag, den 28. November 2014, 12:15 Uhr

Aufgabe 21 Es sei G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe. Zeigen Sie: Die Faltungsalgebra $\mathcal{C}_c(G)$ hat ein Einselement genau dann, wenn G diskret ist.

Aufgabe 22 Zeigen Sie: Erfüllt eine lokalkompakte Gruppe G das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist $\mathrm{L}^2(G)$ separabel.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Stone–Weierstraß und zeigen Sie die Separabilität von $\mathcal{C}_c(G)$.

Aufgabe 23 Zeigen Sie Satz 4.11 aus der Vorlesung: Eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe G ist kommutativ genau dann, wenn die Gruppenalgebra $\mathrm{L}^1(G)$ kommutativ ist.

Aufgabe 24 Es sei G eine lokalkompakte, σ-kompakte Gruppe.

(a) Es seien $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$. Zeigen Sie $f * g \in \overline{\operatorname{span}\{L_x g : x \in G\}}^{\|\cdot\|_u}$.

(*Hinweis*: Approximieren Sie f durch geeignete Treppenfunktionen.)

(b) Es sei $I \subset \mathrm{L}^1(G)$ ein abgeschlossener Teilraum. Man nennt I ein *Linksideal*, wenn $f*g \in I$ für alle $f \in \mathrm{L}^1(G)$ und $g \in I$ gilt. Zeigen Sie:

$$I \text{ ist ein Linksideal } \Leftrightarrow \forall g \in I \forall x \in G \ : \ L_x g \in I \ .$$

(*Hinweis*: Für „$\Leftarrow$“ können Sie $f*g \in \overline{\operatorname{span}\{L_x g : x \in G\}}^{\|\cdot\|_1}$ für $f, g \in \mathrm{L}^1(G)$ ohne Beweis verwenden.)