Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 28. November 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 7

Wird besprochen am Freitag, den 5. Dezember 2014, 14:15 Uhr

Aufgabe 25 Es seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Prä-Hilberträume und $x_\iota \in \mathcal{H}_1$, $\iota \in I$, und $y_\iota \in \mathcal{H}_2$, $\iota \in I$, mit der Eigenschaft $\langle x_j, x_k \rangle = \langle y_j, y_k \rangle$ für alle $j, k \in I$. Zeigen Sie:

(a) Falls $\operatorname{span}(\{x_\iota : \iota \in I\}) = \mathcal{H}_1$, dann existiert genau eine lineare isometrische Abbildung $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit $T(x_\iota) = y_\iota$ für alle $\iota \in I$.

(b) Falls $\mathcal{H}_2$ sogar ein Hilbertraum ist und $\operatorname{span}(\{x_\iota : \iota \in I\}) \subset \mathcal{H}_1$ *dicht*, existiert genau eine lineare isometrische Abbildung $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit $T(x_\iota) = y_\iota$ für alle $\iota \in I$.

(c) Unter den Voraussetzungen von (b) ist T unitär, wenn $\mathcal{H}_1$ ein Hilbertraum ist und $\operatorname{span}(\{y_\iota : \iota \in I\}) \subset \mathcal{H}_2$ *dicht* ist.

Aufgabe 26 Beweisen Sie Lemma (5.11): Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. $U(\mathcal{H})$, versehen mit der starken Operatortopologie, ist eine topologische Gruppe.

Aufgabe 27 Es sei G eine lokalkompakte Gruppe und $\mathcal{H} = L^2(G)$. Durch $\lambda_G : G \to U(\mathcal{H})$, $\lambda_G(x) = L_x$ wird ein Homomorphismus definiert. Zeigen Sie:

(a) Der Homomorphismus λ_G ist stetig in der starken Operatortopologie auf $U(\mathcal{H})$.

(b) Der Homomorphismus λ_G ist *nicht* stetig in der Operatornormtopologie, falls G *nicht* diskret ist.

Aufgabe 28 Es sei p eine Primzahl. Die Menge der ganzen p-adischen Zahlen wird definiert als

$$\mathbb{Z}_p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : a_n \in \{0, \ldots, p-1\}\} = \{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}_0} .$$

Elemente $(a_n)_{n=0,\ldots,\infty}$ von $\mathbb{Z}_p$ werden als formale p-adische Reihe geschrieben

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n .$$

Die Addition auf $\mathbb{Z}_p$ wird definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n .$$

Dabei wird c_n induktiv berechnet durch

$$c_n = a_n + b_n + \epsilon_{n-1} - p\epsilon_n \ ,$$

mit Übertrag ϵ_n gegeben als

$$\epsilon_{-1} = 0 \ , \ \epsilon_n = \left\lfloor \frac{a_n + b_n + \epsilon_{n-1}}{p} \right\rfloor \ (n \geq 0) \ .$$

Hier bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq a$. Dann ist $(\mathbb{Z}_p, +)$ eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element $0 = \sum_0^\infty 0 \cdot p^n$. (Diese Fakten dürfen im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.) Auf $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ wird die **p-adische Norm** definiert durch

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n|_p = p^{-m} \ , \quad \text{für } m = \min\{n : a_n \neq 0\} \ ,$$

ferner setzt man $|0|_p = 0$. Zeigen Sie:

(a) $|\cdot|_p$ erfüllt $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, sowie $|-x|_p = |x|_p$. Folgern Sie: Durch $d_p(x,y) = |x-y|_p$ wird eine Metrik auf $\mathbb{Z}_p$ definiert.

(b) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$: Die Menge $G_m = \{x \in \mathbb{Z}_p \ : \ |x|_p \leq p^{-m}\}$ ist eine offene Untergruppe.

(c) Für $x = \sum_{n=0}^\infty a_n p^n$ und $y = \sum_{n=0}^\infty b_n p^n$ gilt $|x-y|_p \leq p^{-m}$ genau dann, wenn $a_n = b_n$ für alle $n < m$.

(d) Die Metrik d_p definiert eine Gruppentopologie auf $\mathbb{Z}_p$.