Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 5. Dezember 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 8

Wird besprochen am Freitag, den 12. Dezember 2014, 14:15 Uhr

Aufgabe 29 Zeigen Sie: Ein Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist separabel genau dann, wenn er eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Aufgabe 30 Verifizieren Sie Bemerkung 6.2: Es seien G eine lokalkompakte Gruppe und $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Zeigen Sie für einen Homomorphismus $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ die Äquivalenz folgender dreier Aussagen.

(a) Der Homomorphismus π ist stark stetig.

(b) Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt: Die Abbildung $G \to \mathcal{H}$, $x \mapsto \pi(x)f$ ist stetig bez. der Normtopologie auf $\mathcal{H}$.

(c) Es gibt ein $M \subset \mathcal{H}$ mit folgenden Eigenschaften: Es ist $\overline{\operatorname{span}(M)} = \mathcal{H}$ und für alle $f \in M$ ist die Abbildung $G \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle \pi(x)f, f\rangle$ stetig beim neutralen Element.

Aufgabe 31 Es seien X und Y lokalkompakte Räume mit Radon-Maßen μ bzw. ν. Es sei $F \in \mathrm{L}^2(X \times Y)$ und $A_F : \mathrm{L}^2(Y) \to \mathrm{L}^2(X)$ definiert durch

$$(A_F g)(x) = \int_Y F(x,y)\, g(y)\, \mathrm{d}\nu(y)\,.$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $\mathrm{L}^2(X \times Y) \to \mathrm{HS}\left(\mathrm{L}^2(Y), \mathrm{L}^2(X)\right)$, $F \mapsto A_F$ ist unitär.

Aufgabe 32 Es sei p eine Primzahl. Die Menge der ganzen p-adischen Zahlen wird definiert als

$$\mathbb{Z}_p = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : a_n \in \{0,\dots,p-1\}\} = \{0,\dots,p-1\}^{\mathbb{N}_0}\ .$$

Elemente $(a_n)_{n=0,\dots,\infty}$ von $\mathbb{Z}_p$ werden als formale p-adische Reihe geschrieben

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n\ .$$

Die Addition auf $\mathbb{Z}_p$ wird definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n\ .$$

Dabei wird c_n induktiv berechnet durch

$$c_n = a_n + b_n + \varepsilon_{n-1} - p\varepsilon_n \ ,$$

mit Übertrag ε_n gegeben als

$$\varepsilon_{-1} = 0 \ , \ \varepsilon_n = \left\lfloor \frac{a_n + b_n + \varepsilon_{n-1}}{p} \right\rfloor \ \ (n \geq 0) \ .$$

Hier bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq a$. Dann ist $(\mathbb{Z}_p, +)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $0 = \sum_0^\infty 0 \cdot p^n$. (Diese Fakten dürfen im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.) Auf $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ wird die **p-adische Norm** definiert durch

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \right|_p = p^{-m} \ , \quad \text{für } m = \min\{n : a_n \neq 0\} \ ,$$

ferner setzt man $|0|_p = 0$. Zeigen Sie:

(a) Geben Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ an, so daß $i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}_p$ dicht ist.

(b) $\mathbb{Z}_p$ ist kompakt. (Hinweis: Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}_p$ präkompakt und vollständig ist.)

(c) Die von d_p definierte Topologie ist die Produkttopologie auf $\prod_{n \in \mathbb{N}_0} \{0, \ldots, p-1\}$, wenn man die einzelnen Faktoren mit der diskreten Topologie versieht.