Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 12. Dezember 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 9

Wird besprochen am Freitag, den 19. Dezember 2014, 12:15 Uhr

Aufgabe 33

(a) Es sei $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ ein differenzierbarer Charakter.
Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\chi(x) = e^{i\xi x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(Bemerkung: Man kann Differenzierbarkeit für jeden Charakter zeigen. Diese Teilaufgabe charakterisiert also *alle* Charaktere von $\mathbb{R}$.)

(b) Zeigen Sie: Die reguläre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ besitzt keine irreduzible Teildarstellung.

Aufgabe 34 In der folgenden Aufgabe benötigen wir eine Aussage aus der Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$. Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ wird definiert als

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Der Eindeutigkeitssatz für die Fouriertransformierte besagt $\widehat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$.

Es sei nun $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R})$ und $\pi : \mathbb{R} \to U(\mathcal{H}_\pi)$ definiert durch

$$\pi(x) f(y) = e^{-ixy} f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung π ist eine stark stetige, unitäre Darstellung.
(Bemerkung: Der Satz von Plancherel besagt die Existenz einer unitären Fortsetzung $\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ von $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$ mit $\mathcal{P} \in C(\lambda_{\mathbb{R}}, \pi)$. Also gilt $\lambda_{\mathbb{R}} \simeq \pi$.)

(b) Es sei $P \in C(\pi)$ eine Projektion. Zeigen Sie $f \cdot Pg = Pf \cdot g$ punktweise fast überall für alle $f, g \in \mathcal{H}_\pi$.
(*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst $f - Pf \perp \pi(x) Pg$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

(c) Folgern Sie für eine Projektion $P \in B(\mathcal{H}_\pi)$: Es gilt $P \in C(\pi)$ genau dann, wenn es eine Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ gibt mit $(Pf)(y) = \chi_A(y) f(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 35 Es sei $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit Multiplikation $(b, a)(s, t) = (b + as, at)$. Für $(b, a) \in G$ und $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definieren wir

$$\pi(b, a) f(x) = |a|^{1/2} e^{-ibx} f(ax).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung π ist eine stark stetige, unitäre Darstellung von G auf $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Die Darstellung π ist irreduzibel. (*Hinweis*: Verwenden Sie Aufgabe 34 (c).)

(c) Es gilt $\pi \simeq \overline{\pi}$.