Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 19. Dezember 2014

Harmonische Analysis, Übungsblatt 10

Wird besprochen am Freitag, den 9. Januar 2015, 12:15 Uhr

Aufgabe 36 Es sei π eine *irreduzible* Darstellung einer lokalkompakten Gruppe G auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$ und $\mathcal{H}_0$ ein beliebiger Hilbertraum. Es sei $\sigma : G \to U(\mathrm{HS}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\pi))$, $\sigma(x) A = \pi(x) \circ A$.

(a) Zeigen Sie: Ein Operator $T \in B(\mathrm{HS}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_\pi))$ ist genau dann in $C(\sigma)$, wenn es ein $S \in B(\mathcal{H}_0)$ gibt mit $T(A) = A \circ S$.

(b) Folgern Sie: Ist π eine irreduzible Darstellung von G und σ eine irreduzible Darstellung einer lokalkompakten Gruppe H, dann ist $\pi \check{\otimes} \sigma : G \times H \to U(\mathrm{HS}(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\pi))$ eine irreduzible Darstellung von $G \times H$.

Aufgabe 37 Es sei $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ mit der Gruppenmultiplikation

$$(p, q, r)(x, y, z) = \left(p + x, q + y, rze^{i(py-qx)}\right)$$

für $(p, q, r), (x, y, z) \in G$. Durch $\pi : G \to U\left(\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\right)$, $\pi(x, y, z) u(t) = ze^{2iyt+ixy} u(t + x)$.

(a) Zeigen Sie: Für $u, v \in \mathrm{L}^2(G)$ gilt $\left\|c^\pi_{u,v}\right\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

Hinweis: Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ wird definiert als

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \ .$$

Der Satz von Plancherel besagt die Existenz einer unitären Fortsetzung $\mathcal{P} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ von $\mathcal{F}|_{\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2}$.

(b) Folgern Sie die Irreduzibilität von π.

(c) Folgern Sie aus (a): $\left\langle c^\pi_{u,v}, c^\pi_{u',v'} \right\rangle = \langle u, u' \rangle \langle v', v \rangle$. (*Hinweis*: Polarisierung.)

Aufgabe 38 Es sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie endlicher abelscher Gruppen, und $G = \prod_{i \in I} G_i$.

(a) Zeigen Sie: G ist eine topologische Gruppe.

(b) Beschreiben Sie $\widehat{G}$ anhand von $\widehat{G_i}$ $(i \in I)$.

Aufgabe 39 Es sei $\mathbb{Z}_p$ die Gruppe der ganzen p-adischen Zahlen. Wir identifizieren $\mathbb{Z}$ mit der Untergruppe $i(\mathbb{Z})$. (Siehe Aufgabe 32 für die Bezeichnungen.) Zeigen Sie:

(a) Sind $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{T}$ stetige Charaktere mit $\chi_1(1) = \chi_2(1)$, so gilt $\chi_1 = \chi_2$.

(b) Es sei $\chi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{T}$ stetiger Charakter. Dann gibt es $m \geq 0$ so, daß χ konstant ist auf $G_m = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p \leq p^{-m}\}$.

(c) Geben Sie explizit eine Bijektion

$$\Phi : \widehat{\mathbb{Z}_p} \to \{z \in \mathbb{T} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } z^{p^n} = 1\}$$

an.