Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 9. Januar 2015

Harmonische Analysis, Übungsblatt 11

Wird besprochen am Freitag, den 16. Januar 2015, 12:15 Uhr

Aufgabe 40 Es sei $G = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit der Produkttopologie. Es sei $\psi : G \to [0,1]$, $\psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$. Bekanntlich ist ψ surjektiv. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung ψ ist stetig.

(b) Es existieren abzählbare Mengen $A \subset G$ und $B \subset [0,1]$, für die $\psi : G \setminus A \to [0,1] \setminus B$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 41 Wie in Aufgabe 40 sei $G = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit Produkttopologie und -gruppenstruktur.

(a) Es sei μ_G das Haarmaß auf G normiert durch $\mu_G(G) = 1$. Es sei $\psi^*(\mu_G)$ das Bildmaß von μ_G unter ψ definiert durch $\psi^*(\mu_G)(U) = \mu_G(\psi^{-1}(U))$. Zeigen Sie: Das Bildmaß $\psi^*(\mu_G)$ ist das Standardmaß auf $[0,1]$. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Bilder der Untergruppen $G_k = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0\}$ und deren Nebenklassen unter ψ.)

(b) Für einen Charakter χ von G sei $\widetilde{\chi}$ auf $[0,1] \setminus B$ aus Teil (b) von Aufgabe 40 definiert durch $\widetilde{\chi} = \chi \circ \psi^{-1}$ und auf $[0,1]$ beliebig fortgesetzt. Begründen Sie, warum die Menge $\{\widetilde{\chi} : \chi \text{ stetiger Charakter von } G\}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([0,1])$ ist, und geben Sie die Elemente dieser Basis explizit als Treppenfunktionen an.

Die in Punkt (b) konstruierten Funktionen sind die sogenannten *Walsh-Funktionen*.

Aufgabe 42 Wie in Aufgabe 37 sei $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ mit der Gruppenmultiplikation

$$(p,q,r)\,(x,y,z) = \left(p+x, q+y, rze^{\pi i(py-qx)}\right)$$

für $(p,q,r), (x,y,z) \in G$ die „reduzierte Heisenberggruppe“. Durch $\pi_n : G \to U\left(\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\right)$, $\pi_n(x,y,z)\,u(t) = z^n e^{2n\pi iyt + n\pi ixy} u(t+x)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ wird eine Darstellung definiert. Zeigen Sie:

(a) Die Darstellungen π_n sind quadratintegrierbar.

(b) $\mathrm{L}^2_{\pi_n}(G) = \{f \in \mathrm{L}^2(G) : f(x,y,z) = z^{-n} f(x,y,1) \text{ für fast alle } (x,y,z) \in G\}$.

(c) $\displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathrm{L}^2_{\pi_n}(G) = \{f \in \mathrm{L}^2(G) : f(x,y,z) = f(x,y,1) \text{ für fast alle } (x,y,z) \in G\}^{\perp}$.

Hinweis: Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ wird definiert als

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \ .$$

Der Satz von Plancherel besagt die Existenz einer unitären Fortsetzung $\mathcal{P} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ von $\mathcal{F}|_{\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2}$.