Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 16. Januar 2015

Harmonische Analysis, Übungsblatt 12

Wird besprochen am Freitag, den 23. Januar 2015, 14:30 Uhr

Aufgabe 43 Es sei G eine lokalkompakte Gruppe und π eine irreduzible Darstellung auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

(a) Quadratintegierbare Matrixkoeffizienten sind in $\mathcal{C}_0(G)$.

(b) Falls G nicht kompakt und π endlich-dimensional ist, ist π nicht quadratintegrierbar.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 10 und $U(n)$ kompakt.

Aufgabe 44 Es sei G unimodular, $\pi \in \widehat{G}_d$ und $u, v \in \mathcal{H}_\pi$. Es sei $f = C^\pi_{u,v}$, wobei zusätzlich $f \in \mathrm{L}^1(G)$ gelten soll.

(a) Zeigen Sie $\pi(f) = c_\pi^2 u \otimes v$.

(b) Es sei $\sigma \in \widehat{G}_d$, $\sigma \not\simeq \pi$. Zeigen Sie $\sigma(f) = 0$.

Aufgabe 45 Es sei π eine irreduzible Darstellung der lokalkompakten Gruppe G auf $\mathcal{H}_\pi$, für $u \in \mathcal{H}_\pi$ sei $W_u : \mathrm{dom}(W_u) \to \mathrm{L}^2(G)$, $W_u v = C^\pi_{v,u}$ für $v \in \mathrm{dom}(W_u) = \left\{v \in \mathcal{H}_\pi : C^\pi_{v,u} \in \mathrm{L}^2(G)\right\}$, $\mathcal{D}_\pi = \{u \in \mathcal{H}_\pi : \mathrm{dom}(W_u) \neq \{0\}\}$ und $\mathrm{L}^2_\pi(G) = \overline{\mathrm{span}\{W_u v : u \in \mathcal{D}_\pi, v \in \mathrm{dom}(W_u)\}}$.

Zeigen Sie für $\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2(G)$ abgeschlossen, irreduzibel und λ_G-invariant die Äquivalenz folgender beider Aussagen:

(a) $\lambda_G^{\mathcal{H}} \simeq \pi$

(b) $\mathcal{H} \subset \mathrm{L}^2_\pi(G)$

Aufgabe 46 Es seien G eine unimodulare lokalkompakte Gruppe und $\pi : G \to U(\mathcal{H}_\pi)$, $\pi \in \widehat{G}_d$. Es seien $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_\pi$ zwei quadrat-integrierbare Vektoren für π mit $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle \neq 0$. Zeigen Sie folgende (gemischte) Rekonstruktionsformel für die Wavelet-Transformation bez. ψ_1: Es gibt $c_\pi > 0$ mit

$$f = \frac{1}{\langle c_\pi \psi_2, c_\pi \psi_1 \rangle} \int_G \langle f, \pi(x)\psi_1 \rangle \pi(x) \psi_2 \,\mathrm{d}x$$

für alle $f \in \mathcal{H}_\pi$.

Hinweis: Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelationen.