Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Priv.-Doz. Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 23. Januar 2015

Harmonische Analysis, Übungsblatt 13

Wird besprochen am Freitag, den 30. Januar 2015, 14:30 Uhr

Aufgabe 47 Es seien π und σ Darstellungen der lokalkompakten Gruppe G.

(a) Es sei $V = \mathrm{HS}\left(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma\right) \cap C\left(\pi, \sigma\right)$. Zeigen Sie: Dann ist V ein abgeschlossener Teilraum von $\mathrm{HS}\left(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma\right)$ in der Hilbert–Schmidt-Norm.

(b) Es sei nun G kompakt. Zeigen Sie: Die Abbildung $P : \mathrm{HS}\left(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma\right) \to \mathrm{HS}\left(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\sigma\right)$, $P : T \mapsto T_G$ ist die Orthogonalprojektion auf V, wobei T_G wie in (8.1) definiert sei.

Aufgabe 48 Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie:

(a) Falls $\mathcal{H}$ separabel ist, ist der Raum der kompakten Operatoren dicht in $B\left(\mathcal{H}\right)$ bez. der starken Operatortopologie.

Hinweis: Ist $T \in B\left(\mathcal{H}\right)$ und P eine Projektion von endlichem Rang, dann ist $TP \in K\left(\mathcal{H}\right)$.

(b) Die Menge $K\left(\mathcal{H}\right)$ der kompakten Operatoren auf $\mathcal{H}$ ist ein in der Operatornorm abgeschlosses Ideal in $B\left(\mathcal{H}\right)$, d. h. ein abgeschlossener Untervektorraum mit $ST \in K\left(\mathcal{H}\right)$, falls $S, T \in B\left(\mathcal{H}\right)$ und S oder T kompakt.

(c) Jeder Hilbert–Schmidt-Operator $T \in \mathrm{HS}\left(\mathcal{H}, \mathcal{H}\right)$ ist kompakt.

Aufgabe 49 Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $W \subset \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum mit einer Familie $\left(W_j\right)_{j \in J}$ von paarweise orthogonalen, *abgeschlossenen* Teilräumen mit $\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} W_j$ und $W_j \subset W$ für alle $j \in J$. Dann existiert eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ in W.

Sie dürfen (ohne Beweis) verwenden: Jeder Hilbert-Raum besitzt eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 50 Es sei π die quadrat-integrierbare Darstellung von $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}'$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_\pi$ in $\widetilde{\mathcal{D}}_\pi$.

Hinweis: Aufgabe 49 und $W_n = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \chi_{[-2^{n+1}, -2^n] \cup [2^n, 2^{n+1}]} f = f \right\}$, $n \in \mathbb{Z}$.