

Elementare Wege zur mathematischen Modellbildung: Fallbeispiele aus Biowissenschaften und Chemie

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Bernd Gotzen

aus Mönchengladbach

Berichter: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Sebastian Walcher
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Volkmar Liebscher
Univ.-Prof. em. Dr. phil. Uwe A. Michelsen

Tag der mündlichen Prüfung: 23. 02. 2006

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek online verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Modellierung	5
1.1	Modelle: Grundlagen	5
1.1.1	Zur Theorie	5
1.1.2	Klassifizierung	6
1.1.3	Modellvarianten	8
1.1.4	Modellzweck und Korrektheit des Modells	9
1.1.5	Qualitative und quantitative Modelle, Metaphern	9
1.2	Modellierung: Schritte im Modellbildungsprozess	11
1.3	Modelle in der Mathematikausbildung: Eine Bestandsaufnahme	14
2	Konkurrenzmodelle	19
2.1	Populationsmodelle in der Mathematik-Ausbildung: Eine Bestandsaufnahme	19
2.1.1	Populationsmodelle in der Schule	20
2.1.2	Das Ricker-Modell	27
2.1.3	Zusammenfassung	28
2.2	Biologische Grundlagen	29
2.2.1	Wechselwirkungen zwischen und innerhalb von Spezies	29
2.2.2	Konkurrenzphänomene	30
2.2.3	Zwischenergebnis	32
2.3	Modellierung	33
2.3.1	Population und Lebensraum	33
2.3.2	Konkurrenz	34
2.3.3	Zusammenfassung	35
2.4	Arbeiten mit den Simulationstools	36
2.4.1	Beschreibung der Simulationstools	36

2.4.2	Analyse der Simulationsergebnisse	39
2.4.3	Stochastische Effekte	55
2.4.4	Unterrichtliche Umsetzung	58
2.5	Mathematische Ansätze ohne Simulationen	66
2.5.1	Der kombinatorische Ansatz	66
2.5.2	Eine Modellvariante: Binomialverteilung	69
3	Modelle zum Massenwirkungsgesetz	73
3.1	Chemische Grundlagen	73
3.1.1	Reaktionsgeschwindigkeit und Massenwirkungsgesetz	73
3.1.2	Herleitungen und Erklärungsansätze	75
3.1.3	Das Massenwirkungsgesetz	79
3.1.4	Diskussion	82
3.2	Modellierung	83
3.2.1	Ein Kästchenmodell für chemische Reaktionen	83
3.2.2	Das Kästchenmodell als Grenzfall? Verbindungen zum Stoßmodell	87
3.3	Arbeiten mit den Simulationstools	88
3.3.1	Beschreibung der Simulationstools	88
3.3.2	Analyse der Simulationsergebnisse	90
3.3.3	Unterrichtliche Umsetzung	96
3.4	Mathematische Ansätze ohne Simulationen	98
3.4.1	Kombinatorik: Grundlagen	99
3.4.2	Bezug zum Kästchenmodell	101
3.4.3	Ein Plausibilitätsargument	102
3.4.4	Der Zugang via Erwartungswert	103
3.4.5	Eine Verbesserung zur ersten Variante	104
3.4.6	Eine Verbesserung des Zugangs via Erwartungswert	105
3.4.7	Zurück zur Reaktion	106
3.4.8	Herleitung des Massenwirkungsgesetzes	107
4	Beobachtungen in der Praxis	108
4.1	Zielsetzung	108
4.2	Beschreibung der Testbedingungen	108
4.2.1	Gruppe 1: „Schülertage“	108
4.2.2	Gruppe 2: „Schülersymposium“	109

4.2.3	Gruppe 3: Eine Klasse 7	110
4.3	Fallbeispiele	111
4.3.1	Gruppe 1	111
4.3.2	Gruppe 2	112
4.3.3	2. Praxisphase	112
4.3.4	Gruppe 3	114
4.4	Schlussfolgerungen	115
5	Zusammenfassung und Ausblick	116
A	Mathematische Ergänzungen	118
A.1	Grenzwertbetrachtungen und Abschätzungen	118
A.1.1	Die Wahrscheinlichkeit für $1 \leq i < a$ besetzte Kästchen bei festem a und $N \rightarrow \infty$	118
A.1.2	Die Abschätzung des Restglieds in Abschnitt 3.4.5	118
A.1.3	Grenzwertbetrachtungen zum Erwartungswert in Abschnitt 3.4.6	119
B	Das Ricker-Modell	121
B.1	Zusammenfassung des Artikels	121
B.2	Fazit	126
B.3	Eine Variante: <i>Kampf der Larven</i>	126
C	Die Praxisphasen: Protokollbögen und Protokolle	128
C.1	Protokollbögen Gruppe 1	128
C.2	Protokollbögen Gruppe 2	131
C.3	Basisinformationen für Gruppe 3	137
C.4	Protokoll aus Gruppe 1	140

Kapitel 0

Einleitung

„Wenn man echtes Anwenden im Mathematikunterricht anstrebt, also Mathematisierungs- oder Modellbildungsprozesse entwickeln will, dann muß man sich ernsthaft auf außermathematisches Gebiet begeben.“

Heinrich Winter¹

In vielen Bereichen werden Modelle benutzt, um Zusammenhänge auf einfache Weise zu verdeutlichen, große Objekte in kleinerem Maßstab zu präsentieren, Voraussagen zu treffen oder auch um komplexe Mechanismen auf einfache Weise nachzuahmen, um so genauere Aufschlüsse über die Zusammenhänge zu erhalten. Die Motivation für die Nutzung von Modellen variiert mit der Anwendung. Es ist leichter, eine längere Autofahrt mit Hilfe von Straßenkarten zu planen als sich auf rein verbale Informationen zu verlassen. Bei einer Seereise ist der Wetterbericht für die Bestimmung der Reiseroute und der Reisezeiten äußerst wichtig. In vielen Anwendungsbereichen werden Modelle aus Kostengründen genutzt. Gerade im Maschinenbau ist der Bereich der virtuellen Realität in den letzten Jahren immer wichtiger geworden. Es werden Programme entwickelt, mit deren Hilfe das Verhalten von neu entworfenen Maschinen unter realen Einsatzbedingungen zunächst simuliert und virtuell getestet wird. So können Fehlplanungen sehr früh entdeckt und behoben werden. Auch in anderen Bereichen, wie den Sozialwissenschaften, werden Modelle genutzt, um beispielsweise die Bevölkerungsentwicklung eines Landes zu prognostizieren oder die ökonomischen Daten einer Gesellschaft zu bestimmen und zu bewerten. In hohem Maße werden Modelle in den Naturwissenschaften benutzt, da sie die Möglichkeit bieten, komplexe reale Zusammenhänge zu verdeutlichen. Die große Bedeutung von Modellen hat HERTZ² bereits im 19. Jahrhundert erkannt:

„Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewussten Naturkenntnis, daß sie uns befähigt, zukünftige Erfahrungen vor auszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. [. . .] Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denotwendigen Folgen der Bilder stets wieder Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von

¹Winter 1991 [35] S. 206

²Heinrich Hertz 1857 - 1894

der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen, wie an Modellen, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äußeren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifens auftreten werden; wir vermögen so den Tatsachen vorauszuweichen und können nach der gewonnenen Einsicht unsere gegenwärtigen Entschlüsse richten.“³

Aber nicht nur in der Physik sondern auch in Chemie und Biologie werden mathematische Modelle benutzt, um Vorgänge oder Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben. Exemplarisch können in diesem Zusammenhang in der Biologie Populationsmodelle und in der Chemie mathematische Beschreibungen zum Ablauf chemischer Reaktionen genannt werden. Solche Modelle werden in den Kapiteln 2 und 3 näher diskutiert.

Modelle spielen also in vielen Bereichen eine wichtige Rolle. Dennoch wird die Behandlung und Diskussion von Modellen, aber auch deren Entwicklung in der Schule erst seit kurzer Zeit thematisiert. In Nordrhein-Westfalen gewann der Modellbildungsprozess mit den neuen Richtlinien⁴ für die Sekundarstufe II im Jahr 1999 erstmals an Bedeutung. Dort wird das Modellieren als eine von sieben „zentralen Ideen“⁵ bezeichnet. Die Kernlehrpläne⁶ für die Sekundarstufe I für das Land NRW aus dem Jahr 2004 konkretisieren diese Bedeutung der Modellierung, indem das Modellieren als eine von vier „prozessbezogenen Kompetenzen“ genannt wird.⁷ Ein Blick in die Schulbücher zeigt, dass in den neueren Lehrwerken Modelle bewusster angewendet und kritisch hinterfragt werden. Die Entwicklung von Modellen besteht allerdings in den meisten Fällen immer noch aus dem Anpassen von Parametern vorgegebener Modelle an pseudo-reale Daten.⁸ Ein Modellbildungsprozess, der ausgehend von einer (vereinfachten) Beschreibung der Realität mit Hilfe von Simulationen Daten erhebt und aus diesen (oder tatsächlich realen) Daten dann unter Nutzung mathematischer Techniken mathematische Modelle entwickelt, ohne sie schon vorzugeben, ist in keinem der betrachteten Lehrwerke gefunden worden. Auch in Lehrbüchern für die universitäre Ausbildung sind in diesem Bereich Defizite festzustellen.

Es stellt sich somit das Problem, dass gegenwärtig Anwendungsbeispiele fehlen, die den Modellbildungsprozess an realen Problemstellungen thematisieren. Es ist geeignetes Material zu entwickeln, das den Weg von der Beobachtung der Realität bis zum fertigen Modell für Schüler⁹ und Studenten erfahrbar macht. Nur so kann Modellbildung sinnvoll gelehrt werden. Das wesentliche Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, entsprechende Materialien zu liefern, die auf unterschiedlichen Ebenen den Modellbildungsprozess vermitteln. Zunächst werden die ersten Schritte dargestellt, die verdeutlichen, wie eine reale Situation vereinfacht und reduziert hinsichtlich eines Beobachtungsziels beschrieben werden kann. Es entsteht eine Modellvorstellung der Realität, das Konzeptmodell. Daran schließt sich die Arbeit mit den Simulationstools an. Die Basistools können bereits in der Sekundarstufe I eingesetzt werden, wobei die Schüler dort durch die Arbeit mit dem jeweiligen Tool erste qualitative Erkenntnisse gewinnen, ohne mathematische Techniken benutzen zu müssen. Auf dieser Ebene werden kaum mathematische Fähigkeiten vorausgesetzt. Die anschließenden Simulationstools liefern weiterführende Ergebnisse, deren Analyse schließlich mit Mitteln der Oberstufenmathematik zu mathematischen Modellen führen. Die rein ma-

³Eberl 1998 [9] S. 1; dort aus Hertz 1894 [13]

⁴Richtlinien SII 1999 [23]

⁵Richtlinien SII 1999 [23] S. 11

⁶Kernlehrpläne SI 2004 [24]

⁷Kernlehrpläne SI 2004 [24] S. 12

⁸vgl. hierzu auch die Abschnitte 1.3 und 2.3

⁹In dieser Arbeit werden Begriffe wie Lehrer - Lehrerin, Schüler - Schülerin oder Student - Studentin synonym verwandt. Dies dient der besseren Lesbarkeit und beinhaltet keinerlei Diskriminierung, gemeint sind immer beide.

thematischen Modellierungsansätze ohne Nutzung der Simulationstools liefern anspruchsvolle Anwendungen von Kombinatorik und Grenzwerten für Anfängerveranstaltungen an der Universität. Der Prozess der Modellbildung kann somit in Schule und Universität an konkreten Anwendungsbeispielen auf unterschiedlichen Anforderungsstufen behandelt werden.

Es werden an Fallbeispielen aus Biowissenschaften und Chemie Möglichkeiten aufgezeigt, wie mit Hilfe von speziell entwickelten, computerunterstützten Simulationstools mathematische Modelle auf elementare Weise entwickelt werden können. Die vereinfachten Modellannahmen bezüglich der betrachteten Systeme werden jeweils durch entsprechende Beispiele aus der Realität begründet. Im Modellbildungsprozess wird die endgültige Modellgleichung dabei erst durch die mathematische Analyse der Simulationsergebnisse aufgestellt; das Modell ist somit das Ergebnis des Modellbildungsprozesses und nicht vorgegebenes Werkzeug, dessen Parameter an die jeweilige Situation angepasst werden müssen. Die Nutzung der Simulationstools in der Schule ist in unterschiedlichen Altersstufen möglich. Die notwendigen mathematischen Fähigkeiten bei der Analyse entsprechen den Anforderungen eines Mathematikurses in der Oberstufe.

Bevor die jeweiligen Modellierungsprozesse näher diskutiert werden, wird in Kapitel 1 ein kurzer Überblick über die Theorie mathematischer Modelle und den Modellbildungsprozess gegeben. Dabei wird weniger eine grundlegende Darstellung aller Theorien zu diesem Gebiet erfolgen; vielmehr wird der für den in den Kapiteln 2 und 3 dargestellten Modellbildungsprozess notwendige theoretische Hintergrund skizziert.

Die Überlegungen zu den Konkurrenzmodellen in Kapitel 2 führen unter anderem zu einem in der Biologie sehr gängigen Populationsmodell, dem sogenannten **Ricker-Modell**.¹⁰ Eine Herleitung dieses Modells erfolgt zunächst aufgrund der Auswertung der experimentell ermittelten Simulationsdaten. Eine Modellvariante liefert später einen rein mathematischen Zugang zum Ricker-Modell. Im Gegensatz zur ursprünglichen Herleitung von Ricker erscheinen die hier dargestellten Wege, insbesondere die Herleitung über die Simulationstools, welche keine großen technisch-mathematischen Voraussetzungen benötigen, gerade für Schüler verständlicher.

In Kapitel 3 werden auf anschauliche und stark vereinfachte Weise mit Hilfe von Simulationstools die Mechanismen einer einfachen chemischen Reaktion visualisiert. Ausgehend von Beobachtungen auf Teilchenebene ermöglichen weitergehende Simulationstools schließlich eine Analyse von Simulationsdaten, die zum Massenwirkungsgesetz führt.

In beiden Fallbeispielen werden zusätzlich rein mathematische Modelle auf Basis der jeweiligen Konzeptmodelle entwickelt. Hier wird insbesondere mit Mitteln der Kombinatorik gearbeitet, wobei die entstehenden Formeln schließlich asymptotisch betrachtet werden. Die benutzten mathematischen Werkzeuge und Argumente übersteigen in diesem Bereich teilweise den üblichen Schulstoff. Für Anwendungen in Anfängerveranstaltungen der Universität erscheinen diese Alternativen allerdings geeignet, da hier Grenzwertbetrachtungen an realen Problemstellungen erfolgen.

In Kapitel 4 werden drei Testphasen geschildert, in denen die entwickelten Tools mit Schülern unterschiedlicher Altersstufen getestet wurden. Anhand einiger exemplarischer Fallbeispiele werden Konsequenzen erarbeitet, die in die Entwicklung einer konkreten Unterrichtsreihe mit den vorgestellten Simulationstools Eingang finden werden.

Es wird schließlich festgestellt, dass mit den dargestellten Modellbildungsprozessen aus den Kapiteln 2 und 3 ein erster Anfang gemacht wurde, die Entwicklung mathematischer Modelle in der Schule anhand realer Problemstellungen zu vermitteln. Mit den beschriebenen Simulationstools werden komplexe Zusammenhänge und Abläufe auf einfache Weise

¹⁰William Edwin Ricker 1908 - 2001

visualisiert, so dass bereits Schüler der Sekundarstufe I erste Schlussfolgerungen ziehen können. Weitergehende Analysen, die zu deterministischen Modellgleichungen führen, nutzen mathematische Inhalte aus der Obligatorik der Schulmathematik und können somit in der gymnasialen Oberstufe behandelt werden. Die Versuche mit Schülergruppen haben gezeigt, dass einerseits viele Entdeckungen aus der Arbeit mit den Tools resultieren, was den Modellierungsablauf direkt erfahrbar macht. Andererseits zeigt sich, dass die Arbeit mit den Tools in der Schule über einen längeren Zeitraum geplant werden muss, da für eine Reflexion der Zwischenergebnisse mehr Zeit angesetzt werden muss. Zukünftige empirische Untersuchungen bezüglich des Einsatzes der entwickelten Simulationstools in der Schule können hier konkretere Erkenntnisse liefern. Ebenso bieten die Weiterentwicklung der bestehenden Ansätze, aber auch die Entwicklung neuer Materialien Möglichkeiten für anschließende Arbeiten.

Im Anhang werden mathematische Ergänzungen zu Grenzwertuntersuchungen und Abschätzungen dargestellt. Ferner wird die Herleitung des Ricker-Modells im Originaltext diskutiert. Eine Variante liefert eine elementare Herleitung des MONODSchen Kinetik-Modells¹¹ für Populationen. Schließlich werden Protokollbögen und einzelne Protokolle aus den Praxisphasen mit den Schülern dargestellt.

Die in dieser Arbeit beschriebenen Simulationstools sind im Internet auf den Seiten des Lehrstuhls A für Mathematik der RWTH Aachen unter folgender URL zu finden.
<http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/lehramtsausbildung/Tools.html>

¹¹Jacques Lucien Monod 1919 - 1976

Kapitel 1

Modellierung

Im Folgenden werden Grundlagen und unterschiedliche Arten von Modellen vorgestellt. Es handelt sich dabei nicht um eine ausführliche Darstellung der Theorie zu Modellen und Modellbildung. Vielmehr werden die Aspekte, die für die vorliegende Arbeit relevant sind, in geraffter Form dargestellt. Dabei wird vielfach auf BOSSEL¹ zurückgegriffen, da sich seine Darstellungen insbesondere auf den Schulunterricht beziehen. Die Entwicklung von Modellen wird in einem zweiten Abschnitt genauer beschrieben. Hier werden zunächst drei Erklärungsansätze zum Modellierungsprozess vorgestellt und anschließend das eigene Vorgehen skizziert. Im letzten Abschnitt erfolgt ein Blick in die Schule, wobei die Bedeutung von und der Umgang mit Modellen und Modellierung exemplarisch dargestellt werden.

1.1 Modelle: Grundlagen

1.1.1 Zur Theorie

Mathematische Modelle werden in vielen Bereichen eingesetzt. Die in der Einleitung zitierten Überlegungen von Hertz machen deutlich, dass bereits im 19. Jahrhundert mathematische Modelle und Modellbildung auf einer theoretischen Ebene diskutiert wurden. Im Laufe der Zeit sind Theorien zu mathematischen Modellen und dem Modellierungsprozess entwickelt worden, auf die teilweise in diesem Kapitel an späterer Stelle noch eingegangen wird. Eine ausführliche Darstellung sämtlicher Theorien soll allerdings nicht erfolgen. Ferner soll nicht versucht werden, neue oder allgemeingültige Paradigmen für Modellbildung aufzustellen. Vielmehr soll das Vorgehen in dieser Arbeit mit gängigen Theorien verglichen werden. Die Art der Modellentwicklung, wie sie in den Kapiteln 2 und 3 dargestellt wird, lässt sich vielleicht durch folgendes Zitat am einfachsten charakterisieren.

„We are proposing an introduction to mathematical models in life sciences. Before doing maths, we first need to model, which is not an easy business. What is a (good) model? The first purpose of a model is to highlight some important and general phenomena. As a consequence the model must be simple, sometimes a caricature. *Pluralitas non est ponenda sine necessitate*², it will then look like a paradigm. The

¹vgl. Bossel 2004 [5]

²Mannigfaltigkeit sollte nicht ohne Notwendigkeit vorausgesetzt werden. Also: In einem Modell sollte man mit möglichst wenigen Annahmen auskommen. William of Occam 1280 - 1349

model must enable one to foresee the behavior of the system it is supposed to represent, from a quantitative viewpoint if possible, from a qualitative viewpoint if not. However, simplicity is what the person in charge of modelling should constantly aim at, even if we run the risk of losing (partially but inevitably) realism. That is the viewpoint adopted here. We will not insist on a precise and detailed representation of reality. We will rather offer in parallel some models (which will help understand a phenomenon), an real examples (which will explain).³

1.1.2 Klassifizierung

In der Literatur finden sich unterschiedliche Klassifizierungsmöglichkeiten für unterschiedliche Modelle. Für den Zweck der vorliegenden Arbeit erscheint es sinnvoll, zwei Arten von Modellen zu unterscheiden⁴:

- **statisch beschreibende Modelle**
- **dynamisch beschreibende Modelle**

Als statisch beschreibende Modelle sollen Darstellungen der Realität verstanden werden, die einen statischen Zustand verdeutlichen. Hierbei können phänomenologische Aspekte eine Rolle spielen, wie beispielsweise das architektonische Modell eines zukünftigen Bauwerkes oder auch die entsprechenden Bauzeichnungen. Andererseits können in einem solchen Modell auch Zusammenhänge von Systemkomponenten dargestellt werden. Hierunter fallen beispielsweise ein Modell zur Beschreibung von Entscheidungsrountinen oder auch der Streckenplan einer U-Bahn.

Unter dynamisch beschreibenden Modellen werden Abbilder von Ausschnitten der Realität verstanden, die in der Abbildung dynamische Prozesse im realen System beinhalten. Hierunter fallen bereits Modelle, die mechanische Zusammenhänge in einem Objekt verdeutlichen. Als Beispiel sei das bewegliche Modell eines Verbrennungsmotors genannt. Daneben sollen sämtliche computergestützten, dynamischen Simulationsmodelle zur Gruppe der dynamisch beschreibenden Modelle gezählt werden. Die weiteren Ausführungen konzentrieren sich auf den Bereich der dynamisch beschreibenden Modelle.

Dynamisch beschreibende Modelle dienen in der Regel dazu, das Verhalten komplexer Systeme zu beschreiben und ggf. Prognosen über deren Verhalten aufzustellen. Es gibt generell zwei Varianten zur Modellierung des Verhaltens komplexer Systeme:⁵

- Nachahmung des Verhaltens
- Nachbildung der Systemstruktur

In der ersten Variante wird versucht, ein Modellsystem zu entwickeln, dass das Verhalten des realen Systems so gut wie möglich nachahmt. Die innere Struktur des Systems ist dabei unbekannt oder irrelevant („black-box“). In der Regel basiert die Entwicklung dieser Modelle auf der Auswertung vorhandener Daten.

In der zweiten Variante wird die innere Struktur des realen Systems genauer betrachtet.

³Istas 2005 [15] S. 1

⁴Der Begriff des *deskriptiven Modells* wirkt in diesem Zusammenhang zu unscharf, da jedes Modell einen beschreibenden Charakter hat.

⁵vgl. Bossel [5] S. 52ff

Zusammenhänge und Abhängigkeiten innerhalb des Systems werden (so gut es geht) nachgebildet, reale Daten aus Beobachtungen sind nicht unbedingt notwendig („glass-box“). Das Modell selbst liefert Daten, die mit realen Daten verglichen werden können. So kann untersucht werden, ob das System korrekt entwickelt wurde. Während demnach in der ersten Variante ein Modell des Verhaltens entwickelt wird, entsteht in der zweiten Variante ein Modell des Systems.⁶

Mischformen dieser beiden Varianten existieren ebenfalls. Hierbei wird versucht, das System so gut es geht nachzubilden. Gleichzeitig werden bekannte Daten aus Beobachtungen der Realität hinzugezogen, um unbekannte Parameter so einzustellen, dass die Ergebnisse im Modell den realen Ergebnissen entsprechen („grey-box“).⁷ Die beiden Abbildungen 1.1 und 1.2 verdeutlichen den Unterschied zwischen dem Modell des Verhaltens und dem Modell des Systems.

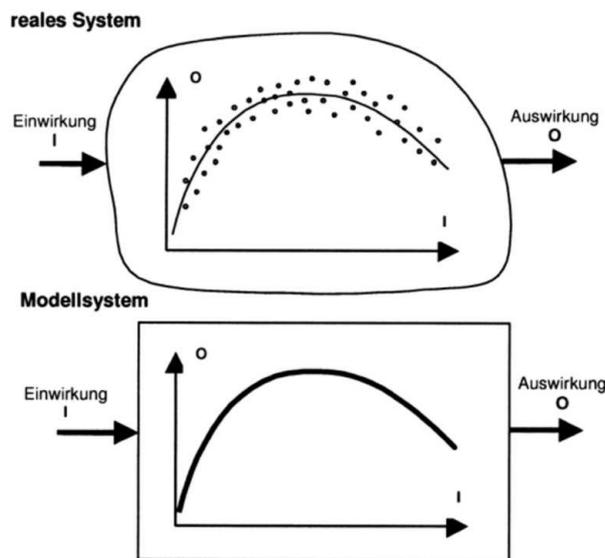


Abbildung 1.1: Ein Modell zur Nachahmung des Verhaltens

⁶vgl. Bossel [5] S. 53

⁷vgl. Bossel [5] S. 53

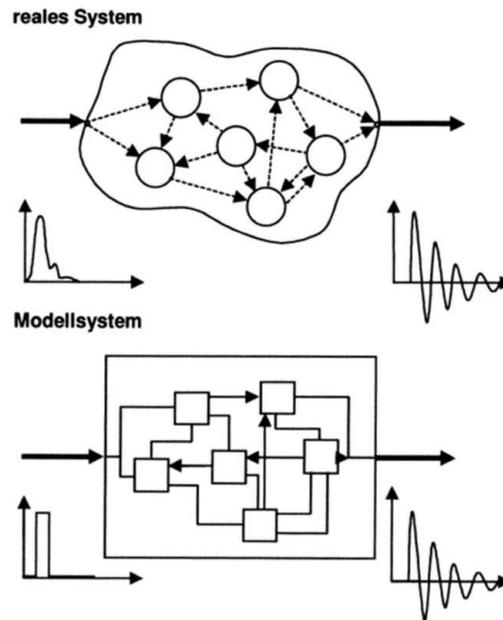


Abbildung 1.2: Ein Modell zur Nachbildung der Systemstruktur

1.1.3 Modellvarianten

Die Vielfalt der Anwendungen bringt eine Vielfalt an dynamisch beschreibenden Modellen mit sich. Die für diese Arbeit wichtigen Varianten werden im Folgenden kurz dargestellt.⁸

- **deterministisches Modell vs. stochastisches Modell**

Bei deterministischen Modellen ist der Übergang in einem System von einem zum nächsten Schritt durch eine feste Vorschrift (etwa einen mathematischen Term) exakt beschrieben. Steht das System im Ablauf an einer bestimmten Stelle, so wird es bei gleichen Parameterwerten stets das gleiche Ergebnis liefern. Bei stochastischen Modellen ist die Änderung einzelner Parameterwerte vom Zufall abhängig. Beispielsweise sind die Konzeptmodelle in den Kapiteln 2.3 und 3.2 stochastische Modelle, da die Verteilung von Objekten in beiden Modellen zufällig geschieht. Bei stochastischen Modellen basiert die Analyse oft auf der Auswertung vieler Simulationen.

- **zeitkontinuierliches Modell vs. zeitdiskretes Modell**

Natürliche Abläufe sind in der Regel zeitkontinuierlich. Das bedeutet, dass beispielsweise das Wachstum einer Population oder eines Lebewesens nicht zu festen Zeitpunkten sondern ständig stattfindet. Die Zustände im realen System ändern sich stetig. Daher können in diesen Modellen Änderungsfunktionen als Differentialgleichungen formuliert werden. In zeitdiskreten Modellen werden die Änderungen dagegen mit Differenzgleichungen angegeben. Oft werden tatsächlich kontinuierliche Prozesse diskretisiert, da sie so entweder leichter zu modellieren oder vom Computer einfacher zu simulieren sind. In manchen Fällen, etwa bei der Modellierung des radioaktiven Zerfalls, werden auch diskrete Abläufe durch kontinuierliche Modelle beschrieben.

⁸Eine tiefere Darstellung der einzelnen Varianten ist bei Bossel 2004 [5] S. 20ff zu finden. Die hier kurz angedeuteten Unterscheidungen basieren auf dieser Textstelle.

1.1.4 Modellzweck und Korrektheit des Modells

Welches Modell auch immer zur Beschreibung einer realen Situation oder eines Systems entwickelt wird, ein Beweis der Korrektheit, das heißt, dass das Modell die Realität „richtig“ abbildet, ist nicht möglich. Dieses Problem entsteht in allen Bereichen der Modellbildung, da kein Modell sämtliche Aspekte der Realität beachten kann. Modelle sind daher Ausschnitte, die sich auf bestimmte Bereiche der Realität beziehen. Diese Bereiche werden durch das Ziel bestimmt, das mit dem Modell erreicht werden soll. Beispielsweise ist für die Modellierung der Autobahnen in Deutschland in Form einer Straßenkarte die konkrete Beschaffenheit der Fahrbahndecke nicht relevant. In der Ausbildung von Bauingenieuren für den Straßenbau ist allerdings ein Modell zur Beschreibung der Schichten und Qualitäten einer Fahrbahndecke wichtig. Dies macht deutlich, dass ein reales Objekt bzw. ein reales System je nach Zielsetzung durch unterschiedliche Modelle beschrieben werden kann, deren „Richtigkeit“ ebenfalls nur über die Zielsetzung bestimmt werden kann. Bossel stellt in diesem Zusammenhang fest, dass es sinnvoller ist, von der „Gültigkeit für den Modellzweck“⁹ zu sprechen. Diese Gültigkeit kann in vier Dimensionen untersucht werden:¹⁰

1. **Verhaltensgültigkeit:**

Liefert das Modell bei entsprechenden Parametereinstellungen das gleiche Verhalten wie das reale System?

2. **Strukturgültigkeit:**

Entspricht die Struktur des Modells der Struktur des realen Systems?

3. **Empirische Gültigkeit:**

Entsprechen die Ergebnisse des Modells den Ergebnissen in der Realität?

4. **Anwendungsgültigkeit:**

Entspricht das Modell dem Modellzweck und den Anforderungen des Benutzers?

Bei der Untersuchung eines Modells hinsichtlich seiner Korrektheit sind somit die oben beschriebenen Fragen zu untersuchen.

1.1.5 Qualitative und quantitative Modelle, Metaphern

Je komplexer ein reales System ist, desto komplexer ist ein passendes Modell. Dabei entsteht die Gefahr, dass das entwickelte Modell an Aussagekraft verliert, da auf der einen Seite zwar das System gut beschreibt. Andererseits ist eine Lösung u. U. nur sehr schwer zu erreichen. EBERL zitiert in diesem Zusammenhang OVERTON und macht in einer Grafik den Zusammenhang zwischen Komplexität und Aussagekraft mathematischer Modelle deutlich (Abb. 1.3).¹¹

⁹Bossel 2004 [5] S. 61

¹⁰vgl. Bossel [5] S. 61-62

¹¹Eberl [9] S. 2

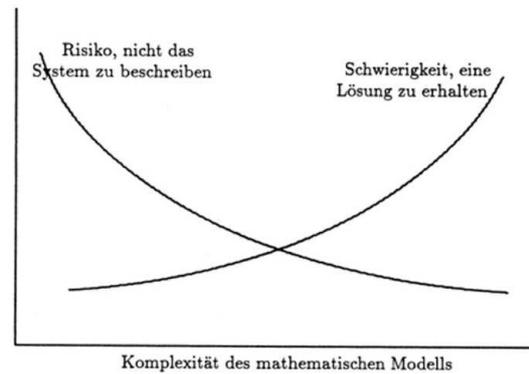


Abbildung 1.3: Zusammenhang zwischen Komplexität und Aussagekraft mathematischer Modelle

Die Kunst bei der Modellierung besteht demnach darin, ein Modell zu entwerfen, das einerseits simpel genug ist, auf einfache Weise eine Lösung zur Zielsetzung zu liefern. Andererseits sollte es so komplex sein, dass es die reale Situation gut beschreibt.

Dieses Ziel ist aufgrund der Komplexität der realen Situation nicht immer zu erreichen. Beispielsweise ist die Beachtung sämtlicher Faktoren, die bei der Entwicklung einer Population in der Natur eine Rolle spielen, nicht möglich. Um dennoch ein Modell entwickeln zu können, wird die Realität auf wenige Aspekte reduziert.

In einem Fall kann diese Reduktion dazu führen, dass Teile des realen Systems nicht in die Modellierung mit aufgenommen werden. Die Modellergebnisse lassen aber dennoch (konkrete) Rückschlüsse auf die Realität zu. Solche Modelle können als **quantitative Modelle** bezeichnet werden.¹²

Im anderen Fall führt die Reduktion zu einer Beschreibung der Realität, die nur noch elementare Mechanismen der Realität durch abstrakte und vereinfachte Vorstellungen beschreibt. Beispielsweise ist das in Abschnitt 3.1.3 dargestellte Modell des Holzapfelkrieges ein Beispiel für ein qualitatives Modell zur Beschreibung von Transportphänomenen. Ein weiteres Beispiel ist der Streckenplan einer U-Bahn; der qualitative Verlauf und eine qualitative Einschätzung der Fahrtdauer zwischen zwei Haltestellen ist dem Plan zu entnehmen. Dennoch wird nicht jede Kurve exakt angegeben und die konkreten Fahrzeiten sind nur einer entsprechenden Tabelle zu entnehmen. Qualitative Modelle sind demnach Modellvorstellungen, die grundlegende Zusammenhänge und Mechanismen auf vereinfachte Weise darstellen, ohne auf reale Daten zurück zu greifen. Das bedeutet auch, dass sie nur bedingt genutzt werden können, um Prognosen für reale Systeme zu liefern. Im Grenzfall ist das Modell von der Realität so weit entfernt, dass es nur noch einer Karikatur der Realität gleich kommt. Diese Modelle werden als **Metaphern** bezeichnet. Das bereits erwähnte Modell des Holzapfelkrieges wird vielfach auch zur Darstellung von chemischen Reaktionen im Gleichgewicht benutzt.¹³ In dieser Funktion kann hier nur von einer Metapher gesprochen werden.

Die in den Abschnitten 2.3 und 3.2 entwickelten Modellvorstellungen basieren in den Konzeptmodellen auf Metaphern, liefern aber letztendlich qualitative Modelle.

¹²vgl. auch Istas 2005 [15] S. 1

¹³vgl. Dickerson / Geis 1981 [8]

1.2 Modellierung: Schritte im Modellbildungsprozess

Der Modellbildungsprozess wird in der Literatur meist als Zyklus dargestellt. Beispielsweise stellt SONAR den Prozess mit folgendem Diagramm dar.¹⁴

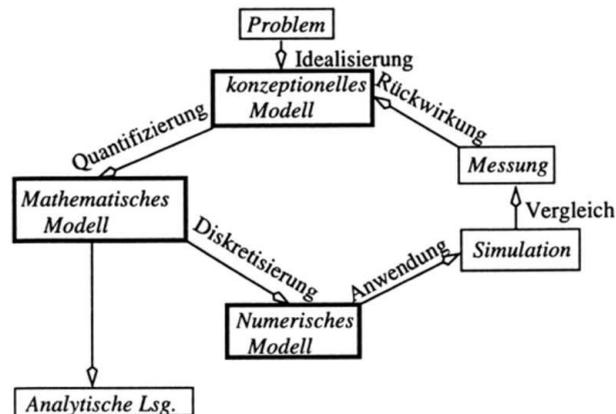


Abbildung 1.4: Diagramm zur Darstellung des Simulationsprozesses nach Sonar

Eberl zitiert PUHR-WESTERHEIDE:¹⁵

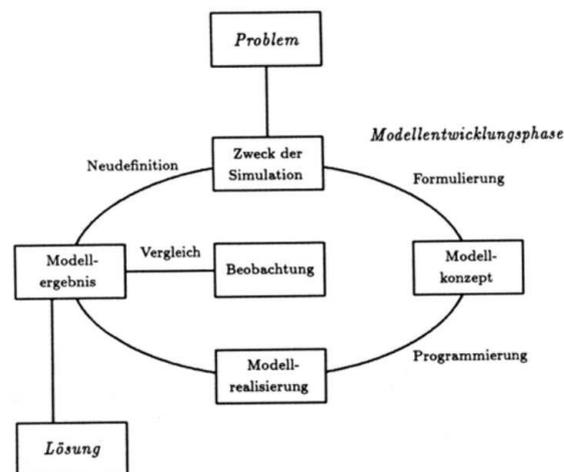


Abbildung 1.5: Diagramm zur Darstellung des Simulationsprozesses nach Puhr-Westerheide

Beide Diagramme betonen den zyklischen Ablauf und unterscheiden sich nicht wesentlich. Bossel beschreibt in [5] den Weg zum Modell nicht in Form eines Diagramms. Seine Ausführungen werden im Folgenden genauer beschrieben.

Bossel stellt fest, dass

„[d]er gesamte Prozess der Systemanalyse von der Modellentwicklung über die Simulation bis hin zur Verhaltensanalyse und Systemänderung [...] immer die folgenden Schritte [durchläuft]:

¹⁴aus Sonar 2001 [27] S. 29

¹⁵aus Eberl [9] S. 3

- Entwicklung des Modellkonzepts
- Entwicklung des Simulationsmodells
- Simulation des Systemverhaltens
- Eingriffsplanung und Systementwurf
- Analyse von Modellsystem und Verhalten

[...]¹⁶

Bei der **Entwicklung des Modellkonzeptes** wird das Ziel des Modells bzw. der Modellzweck definiert. Dadurch werden klare Vorgaben an die Struktur des Modells festgelegt. Dass die Zielsetzung das Modell stark beeinflusst, wurde bereits am Beispiel der unterschiedlichen Modelle für eine Autobahn dargestellt. Modellkonzepte grenzen wichtige von unwichtigen Systemkomponenten ab und stellen eine qualitative Wirkungsstruktur auf. Sonar spricht hierbei von einem „konzeptionellen Modell“, das

„[...] alle Bestandteile des beobachteten Phänomens, die für seine adäquate Beschreibung tatsächlich relevant sind[, enthält].“¹⁷

Im **Simulationsmodell** wird die Wirkungsstruktur konkretisiert. Die Dimension und die Bedeutung der einzelnen Parameter wird genau festgelegt, funktionale Beziehungen werden entwickelt und quantifiziert. Ein Simulationsdiagramm hilft, die quantifizierten funktionalen Zusammenhänge in berechenbarer Weise zu formulieren. Parallel dazu wird in Testphasen die Gültigkeit des Simulationsmodells überprüft und es werden alternative oder kompaktere Darstellungen gesucht. Die Entwicklung eines geeigneten Simulationsmodells vollzieht sich demnach zyklisch in mehreren Iterationsschritten. Bei Sonar wird hier vom Übergang zum „mathematischen Modell“ gesprochen.

„[Das mathematische Modell] ist ein [...] Satz von Gleichungen, meist gespickt mit Nebenbedingungen (Rand und Anfangswerte).“¹⁸

Hier zeigt sich, dass Sonar vornehmlich an deterministische Modelle denkt.

Die **Simulation des Systemverhaltens** beinhaltet zunächst die Programmierung der Simulation mit geeigneter Software sowie die Setzung der Anfangswerte und Systemparameter. Die hauptsächliche Arbeit in dieser Phase bezieht sich auf das Systemverhalten. In der Regel ist das bis dato entwickelte Modell noch zu optimieren. Vielfach ist das in der Simulation dargestellte Verhalten abweichend zum realen System. In der Phase **Eingriffsplanung und Systementwurf** wird eine Optimierung angestrebt. Dies geschieht in mehreren Schritten, wobei zunächst Kriterien zur Beurteilung bestimmt werden. Anschließend wird an entsprechend ermittelten Stellen die Optimierung durch Parameter- und Strukturänderungen das Modell stabilisiert und optimiert. Es erscheint sinnvoll, dass in dieser Phase vorläufige Ergebnisse des Modells auch mit der Realität verglichen werden, und sich daraus gegebenenfalls Veränderungen des Modells ergeben. Auch hier ist ein zyklisches Vorgehen zu erkennen.

In einem letzten Schritt erfolgt die **Analyse des Modellsystems**. Hierbei werden charakteristische Ergebnisse genauer betrachtet. Zu solchen charakteristischen Ergebnissen gehören beispielsweise Gleichgewichtspunkte. Sofern langfristige Ergebnisse zu beobachten

¹⁶vgl. Bossel 2004 [5] S. 25ff

¹⁷vgl. Sonar 2001 [27] S. 21/22

¹⁸vgl. Sonar 2001 [27] S. 22

sind, können durch die Analyse neue funktionale Zusammenhänge zwischen den Parametern ermittelt werden.

Der in dieser Arbeit gewählte Weg zum Modell orientiert sich in einigen Bereichen an der Vorgehensweise von Bossel. Die folgenden Schritte präzisieren das Vorgehen:

- **Definition des Modellzwecks**

Es wird festgesetzt, was mit dem Modell erklärt werden soll. Zu Beginn ist die Vorstellung noch sehr vage. Sie dient allerdings zur Planung des nächsten Schrittes.

- **Beobachtung der realen Situation**

Die Realität, die später in einem Modell beschrieben werden soll, wird genauer betrachtet. Hierbei werden die Untersuchungs- und Beobachtungspunkte durch das zuvor festgesetzte Modellziel bestimmt. In Kapitel 2 wird beispielsweise das Verhalten von Populationen unter intraspezifischer Konkurrenz näher untersucht.

- **Entwicklung eines Konzeptmodells**

Im Gegensatz zum Modellkonzept bei Bossel ist das Konzeptmodell hier eher vergleichbar mit einem Systemansatz. Es wird versucht, durch eine vereinfachte Darstellung wesentliche Aspekte der Realität zu erfassen. Das entstandene Konzeptmodell gleicht dabei eher einer Karikatur der Realität. Die Konzeptmodelle in den Abschnitten 2.3 und 3.3 sind demnach als Metapher zu verstehen (vgl. Abschnitt 1.1.3). Sie dienen als Grundlage zur Erstellung computergestützter Simulationstools.

- **Entwicklung der Simulationsumgebungen**

Dieser Schritt wird in dieser Arbeit weniger intensiv diskutiert, da es sich hierbei lediglich um die Umsetzung des Konzeptmodells in ein lauffähiges Programm handelt. Es ist zu bemerken, dass es sich bei den erstellten Basistools um stochastische Modelle handelt, die eher das System nachahmen als das Verhalten.¹⁹

Zusätzlich werden weitergehende Simulationstools entworfen, deren Notwendigkeit aus der Analyse der bereits bestehenden Tools hervorgeht. Die Entwicklung von Simulationstools und die Analyse der Simulationsergebnisse kann somit zyklisch verlaufen.

- **Analyse der Simulationsergebnisse**

Die Ergebnisse der Simulationstools werden hinsichtlich ihrer Nutzbarkeit und Gültigkeit analysiert. Gegebenenfalls entsteht der Bedarf nach weitergehenden Simulationstools, die beispielsweise einen zeitlichen Verlauf darstellen können oder weitere Aspekte genauer beleuchten. Die Entwicklung der unterschiedlichen Simulationstools zu den Konkurrenzmodellen ergab sich beispielsweise aus der Feststellung, dass nach der Arbeit mit dem Basistool eine langfristige Betrachtung notwendig wurde. Die Analyse der langfristigen Ergebnisse führte schließlich zu der Vermutung, dass die Reproduktion in einem Generations-schritt zu betrachten sei, was die Entwicklung des letzten Tools nach sich zog.

Die Analyse der Simulationsergebnisse liefert aber noch zusätzliche Erkenntnisse. Nicht zuletzt soll aufgrund der Analyse der Simulationsergebnisse ein Modell entwickelt werden, mit dessen Hilfe das reale System möglichst gut beschrieben und die Rolle der auftretenden Parameter deutlich werden. Wie in den Abschnitten 2.4.2 und 3.3.2 dargestellt, liefert die Analyse jeweils ein deterministisches Modell zur Beschreibung des jeweiligen Systems.

¹⁹vgl. Abschnitt 1.1.1

Eine Validierung der erstellten Modelle kann insofern erfolgen, als zum einen qualitative Entwicklungen korrekt prognostiziert werden und zum anderen die entstandenen deterministischen Modelle durch Parameteranpassung in quantitative Modelle überführt werden, und so die Ergebnisse der Modelle mit realen Ergebnisse verglichen werden können. Im Falle des Ricker-Modells ist beispielsweise die Tatsache, dass das aus dem Modellierungsprozess entstandene deterministische Modell bereits seit vielen Jahren in der biologischen Forschung für reale Populationen benutzt wird, eine Bestätigung der gesamten Modellentwicklung.

Die Ausführungen zeigen, dass bei der Entwicklung von Modellen äußerst konzentriert und diszipliniert vorgegangen werden muss. Die Modellierung ist eine Fertigkeit, die in vielen Bereichen den Mathematikern abverlangt wird, was sie zu einer zentralen und charakteristischen Aufgabe in der Mathematik macht. Nicht alleine darauf basiert die Notwendigkeit, bereits in der Schule den Umgang mit Modellen, aber auch die Entwicklung von Modellen zu behandeln.

1.3 Modelle in der Mathematikausbildung: Eine Bestandsaufnahme

Mit der Einführung der neuen Richtlinien für die Sekundarstufe II für das Fach Mathematik in NRW im Jahr 1999 erhielt die Modellbildung erstmals ein größeres Gewicht im Mathematikunterricht. In den Richtlinien werden zentrale Ideen vorgestellt, die

„als Leitlinien [dienen], [um] über Sinn und Bedeutung, kulturellen Stellenwert und innermathematischen Zusammenhang der jeweils anstehenden mathematischen Themen zu reflektieren.“²⁰

Die Idee des Modellierens unterstreicht dabei erstmals die Bedeutung von Modellierung und dem Umgang mit Modellen. Die Notwendigkeit, den Modellbildungsprozess im Unterricht zu thematisieren, ist jedoch schon früher festgestellt worden. WINTER weist in [35] zwar auf Probleme bei einem anwendungsorientierten Unterricht hin, betont andererseits aber auch dessen Bedeutung:

„Der mögliche Hinweis, die Behandlung der Fallgesetze gehöre doch in den Physikunterricht, allenfalls könne man im Mathematikunterricht an passender Stelle darauf zurückgreifen und entsprechende Anwendungsaufgaben rechnen, ist verständlich und bringt schon gleich eines der didaktischen Dilemmata auf den Punkt: Wenn man echtes Anwenden im Mathematikunterricht anstrebt, also Mathematisierungs- oder Modellbildungsprozesse entwickeln will, dann muß man sich ernsthaft auf außermathematisches Gebiet begeben. Genau diese Intention aber ruft einen ganzen Schwarm von Problemen hervor: Kompetenz des Lehrers, Abstimmung mit anderen Fächern, zusätzlich Pensumsdruck, mögliche Desorganisation des mathematischen Curriculums, Irritationen bei den Schülern und Eltern usw.

Andererseits würde eine weitgehende Reduktion auf ‚reine‘ Mathematik - evtl. mit gut vorstrukturierten Anwendungstextaufgaben an passenden Stellen angereichert - die pädagogischen Chancen, die in einer tieferen Wirklichkeitsorientierung liegen, ungenutzt lassen, und wie wollte man das verantworten?“²¹

²⁰Richtlinien SII [23] S. 7

²¹Winter 1991 [35] S. 206

Bezüglich der Notwendigkeit der Integration von Wirklichkeit und Mathematik bemerkt Winter auch folgendes:

„Wahrscheinlich wird es solange keinen entscheidenden Fortschritt in Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts geben, solange das überaus komplizierte Verhältnis zwischen ‚der ‚Wirklichkeit und ‚der ‚Mathematik nicht in einem tieferen pädagogischen Sinne verstanden wird.“²²

Bei der Umsetzung der Idee des Modellierens in neuen Schulbüchern wurde zwar mehr Wert auf Modelle gelegt, in der Regel wurden die benutzten Modelle allerdings weitgehend vorgegeben bzw. nicht aus der Realität heraus begründet. Entsprechende Beispiele werden in 2.1 dargestellt.

Nachdem seit 1999 die Modellierung in der Sekundarstufe II ein größeres Gewicht erhalten hatte, wurden die Modellbildung und das Modellieren durch die Einführung der neuen Kernlehrpläne im Jahre 2004 wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichtes in der Sekundarstufe I. Laut diesen Kernlehrplänen ist Modellierung als eine von vier prozessbezogenen Kompetenzen bereits in der Sekundarstufe I von elementarer Bedeutung. Im Überblick über die Jahrgangsstufen wird zum Modellieren in den Kernlehrplänen folgendes angegeben:²³

Jahrgangsstufen	Modellieren
5/6	Erstellen von Termen, Figuren und Diagrammen zu Sachaufgaben; Angaben von Realsituationen zu Figuren, Termen und Diagrammen
7/8	Aufstellen von Gleichungen und Zuordnungen zu Realsituationen; Angaben von Realsituationen zu Tabellen, Grafen, Gleichungen
9/10	lineare/exponentielle Modelle für Wachstumsprozesse; Angaben von Realsituationen zu linearen/exponentiellen Funktionen

Diese neue Gewichtung wird sich allerdings erst langsam in der Schule umsetzen lassen, da Modellbildung nicht von heute auf morgen erlernt oder unterrichtet werden kann. Desweiteren fehlen Unterrichtswerke, die anhand realer Beispiele darstellen, wie ein mathematisches Modell entstehen kann. Die von Winter dargestellten Probleme treten hier offensichtlich zu Tage.

Beispielsweise wurden und werden Wachstumsprozesse in der Jahrgangsstufe 10 mit Exponentialfunktionen modelliert. Eine Begründung der jeweils angenommenen Proportionalitäten wird jedoch nicht gegeben. Entsprechende Beispiele aus Unterrichtswerken werden in Abschnitt 2.1 noch angegeben. Die behandelten Wachstumsmodelle werden dabei ebenso vorgegeben wie der Modellierungsprozess. Hinzu kommt die Tatsache, dass selten auf reale Daten verwiesen wird. Das folgende Beispiel verdeutlicht das Problem.

„3. Ein Beispiel aus der Natur:

Auch das Leben in der Natur ist in vielfältiger Weise von Wachstums- und Vermehrungsvorgängen geprägt.

²²Winter 1991 [35] S. 216

²³vgl. Kernlehrpläne 2004 [24] S. 32

Beispiel

Bei einer Bakterienkultur wird die Anzahl der Bakterien im Abstand von jeweils einer halben Stunde bestimmt. Es ergeben sich die Werte der folgenden Tabelle; dabei ist die angegebene Zahl N jeweils mit dem Faktor 10^6 zu multiplizieren.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
N	14,2	15,4	16,6	18,0	19,4	21,0	22,7	24,6	26,6	28,7

Um die Werte zu vergleichen, bilden wir auch hier die **Differenzen** und Näherungswerte für die **Quotienten** aufeinander folgender Werte. Es ergibt sich:

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Differenz	1,2	1,2	1,4	1,4	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,3
Quotient	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08

[...]²⁴

Es ist zu bezweifeln, dass bei einer realen Datenerhebung der Quotient sich ähnlich konstant verhalten würde.

Nur in manchen Fällen wird zu einer kritischen Betrachtung des Modelles angeregt. Das folgende Beispiel ist eine dieser Ausnahmen.

„*Mathematisches Modell des Wachstums von Bakterien*

Angenommen, eine Bakterienpopulation (Bakterienkultur) verdoppelt sich innerhalb von einer Stunde durch Zellteilung. Geht man von anfänglich zehn Bakterien aus, so kann man die Entwicklung der Anzahl der Bakterien berechnen.

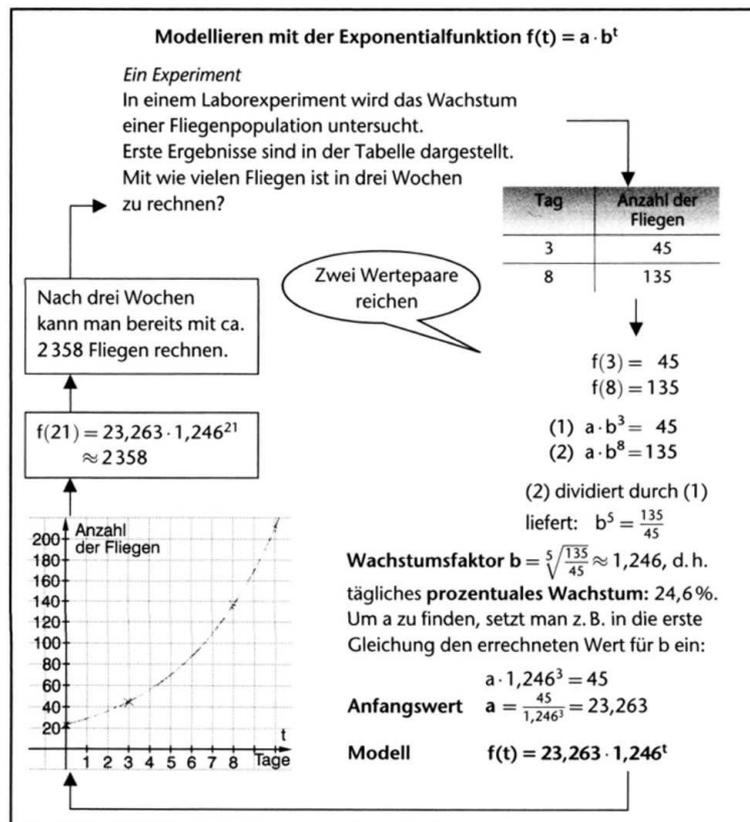
[...]

e) Modellkritik: Wieviele Bakterien werden es nach einer Woche sein? Hältst du das Ergebnis für realistisch? Begründe deine Meinung.“²⁵

Auch wenn hier der kritische Umgang mit einem Modell gefordert wird, wird im selben Buch an späterer Stelle ein Verfahren zur „Modellierung“ angegeben:

²⁴vgl. [20] S. 137

²⁵Lergenmüller/Schmidt 2004 [21] S. 29

Abbildung 1.6: Vorgehensweise zum Modellieren mit der Exponentialfunktion $f(t) = a \cdot b^t$

Die hier angegebene Vorgehensweise hat nur wenig mit echter Modellierung gemein. Es handelt sich lediglich um ein Verfahren zur Anpassung von Parametern einer vorgegebenen Funktion, um (fiktive) Messdaten möglichst gut zu beschreiben. Die Funktion selbst wird nicht aus den realen Daten begründet.

Neben den Wachstumsmodellen spielen in der Schule im Rahmen der Stochastik die sogenannten Urnen-Modelle insofern eine Rolle, als dass sie von Schülern als Modelle wahrgenommen werden.²⁶ Diese Modelle dienen im Gegensatz zu den Wachstumsmodellen jedoch nicht direkt zur Beschreibung realer Systeme. Zwar sind sie aus einem realen Vorgang, dem Ziehen von Kugeln aus einer Urne, erwachsen, werden allerdings eher dazu benutzt, komplizierte Zählmechanismen zu verdeutlichen. Demzufolge wird hier Modellierung dahingehend betrieben, dass Anwendungen auf die Urnen-Modelle zurückgeführt werden.

In vielen anderen Gebieten der Schulmathematik werden anwendungsorientierte Problemstellungen unter Nutzung der Mathematik bearbeitet. Beispielsweise werden Kostenanalysen oder auch Trassierungsaufgaben im Bereich der Kurvendiskussion behandelt. Mit Hilfe der Integralrechnung werden Oberflächen und Volumina berechnet. In der analytischen Geometrie werden im Euklidischen Vektorraum Geraden dargestellt, die als Flugbahnen oder Lichtstrahlen interpretiert werden. Diese mathematischen Beschreibungen realer Objekte oder Zusammenhänge können nur bedingt als Modelle bezeichnet werden; insbesondere wird die Herleitung der jeweiligen Darstellungen nicht in Form einer Modellbildung durchlaufen. Vielmehr erscheinen die anwendungsorientierten Aufgaben oft

²⁶vgl. Abschnitt 3.4.1

als Versuch, einen rein mathematischen Inhalt in einem vorstellbaren Zusammenhang zu präsentieren.

Allgemein kann festgehalten werden, dass die Modellierung in der Schule zur Zeit eine untergeordnete Rolle spielt. Durch die neuen Kernlehrpläne in NRW wird das Modellieren stärker in den Mittelpunkt gerückt. Hierbei sind erste Ansätze einer „echten“ Modellierung zu erkennen, da das benutzte Modell kritisch hinterfragt wird. Dennoch fehlt es an Anwendungsbeispielen, bei denen die Modellierung direkt am realen Objekt beginnt und der Modellierungsprozess dargestellt und erfahrbar gemacht wird.

Kapitel 2

Konkurrenzmodelle

Viele natürliche Prozesse werden mit Hilfe mathematischer Modelle beschrieben, dargestellt und auch untersucht. Die Aufgaben des Mathematikers bestehen in der Regel darin, ein Modell zu entwickeln, es zu analysieren und auch wieder zu beurteilen. Bei der Entwicklung eines Modells müssen oft die am realen Objekt getätigten Beobachtungen stark vereinfacht und idealisiert werden, um ein überschaubares und nutzbares Modell entwickeln zu können. Gerade diese Reduktion ist einer der wichtigsten Arbeitsschritte bei der Erstellung mathematischer Modelle.

Im Folgenden soll zunächst dargestellt werden, welche gängigen Modelle in der Schule behandelt werden. Anschließend wird dargestellt, welche Konkurrenzeffekte in der Natur beobachtet werden können. In diesem Zusammenhang werden zwei zentrale Feststellungen entwickelt, die unter anderem Grundlage für die darauffolgende Entwicklung eines Konzeptmodells sind. Das dargestellte Konzeptmodell ist Basis von Simulationstools, die in Abschnitt 2.4 näher beschrieben werden. Die Auswertung der Simulationsergebnisse liefert schließlich deterministische Modelle zur Beschreibung des Bestandes von Populationen. Die Analyse und Auswertung der Ergebnisse basiert im Hauptteil auf mathematischen Grundlagen, die in der Schule behandelt werden. In Abschnitt 2.4.4 werden Vorschläge zur unterrichtlichen Umsetzung der Simulationstools gemacht. Hierbei geht es prinzipiell darum den Weg der Entwicklung eines Modells ausgehend von Naturbeobachtungen über Simulationen bis hin zum endgültigen deterministischen Modell im Mathematikunterricht zu thematisieren. Aus diesem Grund richten sich entsprechende Abschnitte einerseits an Mathematiklehrer in der Schule, andererseits aber auch an Mathematikdozenten an Universitäten, die die vorgestellten Tools in Anfängerveranstaltungen nutzen können.

Im Abschnitt 2.5 werden mathematische Modellierungsansätze dargestellt, die lediglich auf dem in 2.3 entworfenen Konzeptmodell basieren und die Simulationstools nicht nutzen.

2.1 Populationsmodelle in der Mathematik-Ausbildung: Eine Bestandsaufnahme

Im Folgenden werden zunächst Beispiele für mathematische Modelle für die Beschreibung von Populationen vorgestellt, die in der Schule benutzt werden. Anschließend wird ein realitätsnahes Populationsmodell aus der Biologie, das sogenannte Ricker-Modell, dargestellt, das in den 1950er Jahren entwickelt wurde.

2.1.1 Populationsmodelle in der Schule

Insbesondere an Hand von Wachstumsvorgängen wird in Schulbüchern oft die Entwicklung von Modellen behandelt. Bei der Behandlung von Exponentialfunktionen werden unter anderem Wachstumsprozesse besprochen. Die dabei auftretenden Wachstumsfunktionen und somit die damit verknüpften Wachstumsmodelle werden in den nächsten Abschnitten vorgestellt, wobei insbesondere auf die Begründung der jeweiligen Modelle eingegangen wird.

Exponentielles Wachstum

Neben dem linearen Wachstum ist das **exponentielle Wachstum** das einfachste Wachstumsmodell. Grundlage dieses Modells ist die Annahme, dass die Änderung des Bestands B_1 proportional zum Bestand ist. Die Umsetzung dieser Annahme kann auf zwei Arten geschehen. Wird eine Größe betrachtet, bei der die Bestandsänderung in zeitlich diskreten Schritten verläuft, so ist eine zeitlich diskrete Umsetzung angebracht:

$$B_1(t + \Delta t) - B_1(t) \sim B_1(t) \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow \frac{B_1(t + \Delta t) - B_1(t)}{\Delta t} = \lambda \cdot B_1(t) \quad (2.2)$$

Ist hingegen bei der beobachteten Größe keine diskrete Einteilung erkennbar, weil sich die Änderung kontinuierlich oder in zu kleinen Zeitschritten vollzieht, so ist ein kontinuierlicher Ansatz sinnvoll.

$$\frac{dB_1(t)}{dt} \sim B_1(t) \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \dot{B}_1(t) = \lambda B_1(t) \quad (2.4)$$

Die Berechnung des Bestands zu einer bestimmten Zeit t_i erfolgt beim zeitdiskreten Ansatz mithilfe einer Iterationsvorschrift, wobei aus Vereinfachungsgründen der Zeitschritt mit 1 angesetzt wird ($\Delta t = 1$).

$$B_1(t + 1) = (1 + \lambda) \cdot B_1(t) \quad (2.5)$$

Die Anwendung des Modells erfolgt dann beispielsweise mit Hilfe einer Tabellenkalkulation oder mit selbst geschriebenen Programmen. Insbesondere bei Schülergruppen, mit denen eine Behandlung von Differentialgleichungen nicht möglich ist, bietet dieses Modell eine Möglichkeit exponentielles Wachstum zu behandeln. Diese Option besteht auch bei anderen Wachstumsmodellen und wird auch in Schulbüchern umgesetzt.¹

Im kontinuierlichen Fall muss zur Bestimmung einer Bestandsfunktion die Differenzialgleichung gelöst werden. Unter der Voraussetzung, dass $B_1(t) > 0$ gilt, erfolgt die Lösung nach der gängigen Methode:

$$\dot{B}_1(t) = \lambda B_1(t) \quad (2.6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{B}_1(t)}{B_1(t)} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \frac{\dot{B}_1(t)}{B_1(t)} dt = \int_0^t \lambda dt$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{B_1(t)}{B_1(0)} = \lambda t$$

$$\Leftrightarrow B_1(t) = B_1(0) \cdot e^{\lambda t} \quad (2.7)$$

¹vgl. Lergenmüller / Schmidt 2004 [21]

Mit $B_1(0) = 1$ lässt sich festhalten, dass die Funktion $B_1(t) = e^{\lambda t}$ die Differentialgleichung $\dot{B}_1(t) = \lambda B_1(t)$ löst. Zusätzlich kann festgestellt werden, dass jede Lösung der Differentialgleichung $f(t)$ diese Form hat:

$$\begin{aligned}
 &\text{Es gelte: } f'(t) = \lambda \cdot f(t) \\
 &\text{zu zeigen ist: } f(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad (c \text{ konstant}) \\
 &\Leftrightarrow f(t) \cdot e^{-\lambda t} = c \\
 &\Leftrightarrow (f(t) \cdot e^{-\lambda t})' = 0 \\
 &\Leftrightarrow f'(t) \cdot e^{-\lambda t} + (-\lambda)f(t) \cdot e^{-\lambda t} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda f(t) \cdot e^{-\lambda t} - \lambda f(t) \cdot e^{-\lambda t} = 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Abbildung 2.1 zeigt den typischen Verlauf einer solchen Wachstumsfunktion.

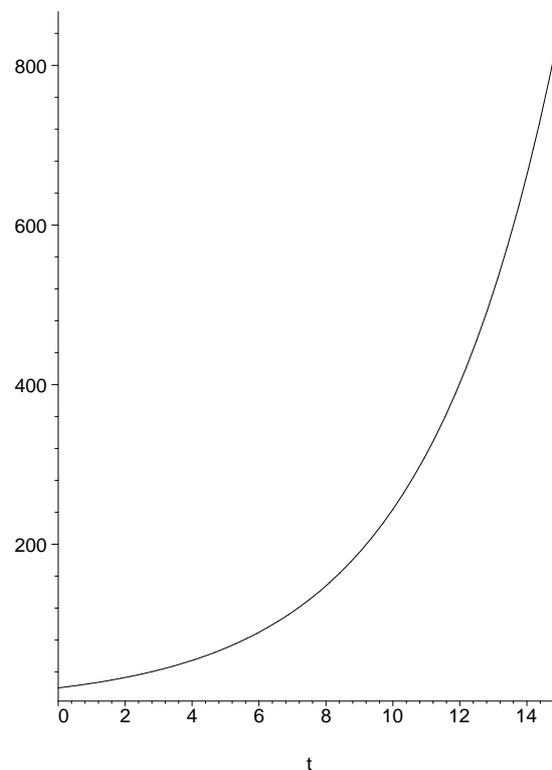


Abbildung 2.1: Exponentielles Wachstum

In Schul- und Lehrbüchern sind Zinsentwicklung und das Wachstum von Populationen wie Bakterien oder Wasserpflanzen die klassischen Anwendungsbeispiele für das exponentielle Wachstum. Sowohl der proportionale Zusammenhang zwischen Bestandsänderung und Bestand als auch der Reproduktionsfaktor werden in der Regel fest vorgegeben. Alle Angaben sind dabei derart vorbereitet, dass die resultierende Gleichung schon klar als Ziel erkennbar ist. Das bereits bestehende Modell wird also nachempfunden bzw. bestätigt. So können beispielsweise in unterschiedlichen Schulbüchern ähnliche Ausgangssituationen vorgefunden werden:

„Angenommen eine Bakterienpopulation (Bakterienkultur) verdoppelt sich innerhalb von einer Stunde durch Zellteilung. Geht man von anfänglich zehn Bakterien aus, so kann man die Entwicklung der Anzahl der Bakterien berechnen.[...]

Mit welcher Formel kann man die Anzahl der Bakterien berechnen? “²

²Lergenmüller / Schmidt 2004 [21] S. 29

„Bei einer Kultur von Coli-Bakterien wird in stündlichen Abständen die Bakterienzahl pro ml Nährlösung bestimmt[. . .]. Da in der Tabelle $\frac{f(t+1)}{f(t)} = a = 1,82 = 1 + \frac{82}{100}$ ist, wächst die Bakterienzahl $f(t)$ bei einem Zeitschritt von 1h jeweils näherungsweise um den konstanten Faktor $a = 1,82$ (Wachstumsfaktor).“³

„Auf einer Insel leben 100 Kaninchen. Jeden Monat kommen 10 Prozent der Kaninchenzahl des Vormonats dazu.“⁴

Aber auch in Lehrbüchern für Studenten sind ähnlich Beispiele zu finden, wie die folgenden Zitate zeigen.

„Zur biologischen Beseitigung von Ölverunreinigungen auf Wasserflächen sind ölfressende Bakterien gezüchtet und bereits in kleinerem Maßstab eingesetzt worden. Unter günstigen äußeren Bedingungen vermehren sich diese wie andere Bakterien so, dass der Zuwachs, bezogen auf kleine Zeiträume, zur Gesamtzahl der Bakterien zum Beobachtungszeitpunkt proportional ist. Durch welche Funktion kann ihr Wachstum beschrieben werden?“⁵

„[. . .]Eine erste Idee wäre etwa, die zeitliche Änderung der Population mit der Größe der Population selbst zu koppeln. Ist die Population bereits sehr groß, dann soll auch ein großes Wachstum vorliegen. Das entspricht ja immerhin der Erfahrung, denn viele Lebewesen produzieren schließlich auch mehr Nachwuchs als eine kleine Gruppe. Gießen wir diese Überlegung in mathematische Formeln und erinnern uns, dass die zeitliche Änderung der Population gerade durch $\frac{dx}{dt}$ gegeben ist, dann erhalten wir die folgende Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx; & r \in \mathbf{R} \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Hierbei ist r ein Proportionalitätsfaktor, der dem unterschiedlichen Verhalten unterschiedlicher Lebewesen Rechnung tragen soll (d. h., r wird vorgegeben).“⁶

In keinem der zitierten Bücher wird die angenommene Proportionalität direkt mit biologischen Tatsachen begründet oder zumindest erklärt. Ein kleiner Ansatz ist zwar bei Sonar [27] zu erkennen, wobei die Frage bleibt, ob ein monotoner Zusammenhang auch ohne weiteres in Form einer Proportionalität umgesetzt werden kann.

Beschränktes Wachstum

Der Vergleich des exponentiellen Wachstums mit realen Populationen führt zu der Erkenntnis, dass bei begrenzten Ressourcen das Wachstum nicht unendlich weiter laufen kann. Es wird eine Grenze K geben, der sich die Populationsgröße annähert. Diese Annäherung verläuft gegen Ende immer langsamer, was zu der Annahme führt, dass die Änderung der Populationsgröße proportional zur Differenz aus Bestand und Grenzwert ist. Mit dieser Annahme kann die folgende Differenzialgleichung aufgestellt werden:

$$\frac{dB_2}{dt} = r \cdot (K - B_2), \quad r \in \mathbf{R}^+ \wedge K \text{ const.} \quad (2.9)$$

³Baum 2003 [2] S. 103

⁴Koller 1995 [17] S. 38ff

⁵Hartmann 1996 [12] S. 16

⁶Sonar 2001 [27] S. 31

Die Lösung dieser Differenzialgleichung liefert die Bestandsfunktion zum **beschränkten Wachstum**.

$$B_2(t) = K - (K - B_2(0)) \cdot e^{-rt}, \quad r \in \mathbf{R} \wedge K \text{ const.} \quad (2.10)$$

Der Verlauf dieser Wachstumskurve wird in Abbildung 2.2 dargestellt.

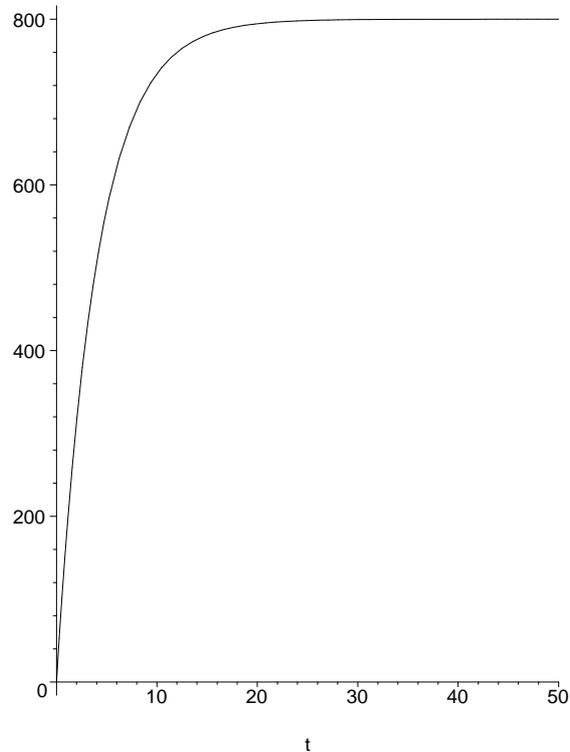


Abbildung 2.2: Beschränktes Wachstum

Die Herleitung dieses Modells basiert in den Schulbüchern in der Regel auf der gleichen Voraussetzung, dass bei beschränktem Platz- bzw. Nahrungsmittelangebot die Population nicht endlos wachsen kann.

„Bei linearem und bei exponentiellem Wachstum ist der Zuwachs bzw. der Wachstumsfaktor konstant. Dies führt zu einem unbegrenztem Wachstum. Das ist in der Realität nur sehr selten möglich. Gründe wie Platznot, Nahrungsmangel oder Stress führen dazu, dass eine Population nicht unbegrenzt wächst. Sinnvollere mathematische Modelle berücksichtigen daher, dass trotz Wachstum eine bestimmte Grenze nicht überschritten werden kann.“

In den folgenden Modellen ändert sich der Zuwachs Z . Er wird kleiner, je näher sich x_n einer Grenze G nähert.

Der Zuwachs Z ist proportional zur Differenz des Bestandes x_n und einer Obergrenze G .

$$Z = b(G - x_n)$$

Einfach beschränktes Wachstum

$$x_{n+1} = x_n + b(G - x_n)$$

Der Zuwachs wird kleiner.⁷

⁷Lergenmüller / Schmidt 2004 [21] S. 207

„Wir versuchen nun eine Bestandsfunktion B_2 zu bestimmen, die die Kapazität K nicht übersteigt. Dazu nehmen wir an, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit $B_2'(t)$ der Mobiltelefone nicht - wie im exponentiellen Fall - der Anzahl $B_2(t)$ der Handybesitzer proportional ist, sondern der Anzahl $K - B_2(t)$ derer, die noch kein Handy besitzen:

$$B_2'(t) = c(K - B_2(t)). \quad (2.11)$$

Durch diesen Ansatz ist sichergestellt, dass die Wachstumsgeschwindigkeit $B_2'(t)$ mit dem Sättigungsmanko $M(t) = K - B_2(t)$ abnimmt.“⁸

„Keine Population kann unbeschränkt wachsen. Futterknappheit, Raumnot, zu wenig Unterschlupfmöglichkeiten, schlechte physische Bedingungen usw. setzen dem Wachstum Grenzen. Es sei G ($G > 0$) eine feste obere Grenze für die Größe $f(t)$ einer Population. Dann nähert sich $f(t)$ mit zunehmender Zeit dem Wert G immer mehr. Das besagt, dass die Wachstumsrate $f'(t)$ gegen Null strebt, wenn $(G - f(t))$ immer kleiner wird. Eine naheliegende mathematische Formulierung eines Modells für das beschränkte Wachstum ist daher gegeben durch:

$f'(t)$ proportional zu $(G - f(t))$, d. h. $f'(t) = r \cdot (G - f(t))$ mit $r \in \mathbf{R}^+$ und $G > f(t)$.“⁹

Neben den Anwendungen in denen es um das Wachstum von Populationen oder Populationsgruppen geht, werden zu diesem Wachstumsverhalten auch Probleme aus der Physik thematisiert:

„Ein Körper, dessen Temperatur höher ist als die Temperatur seiner Umgebung und dem nicht auf irgendeine Weise laufend Wärme zugeführt wird, kühlt sich ab. Bezeichnen wir die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$ mit y_0 und die konstant gehaltene Temperatur der Umgebung mit T , dann besagt das sog. Newtonsche Abkühlungsgesetz

$$y' = a(T - y), \quad f(0) = y_0,$$

worin a eine von der Beschaffenheit des Körpers und der Umgebung abhängige Konstante ist.“¹⁰

Wie bereits beim exponentiellen Wachstum wird auch in diesen Beispielen keine biologisch oder physikalisch motivierte Erklärung bzw. Grundlegung für die Annahme einer Proportionalität zum sogenannten Sättigungsmanko gegeben. Es ist zu bezweifeln, dass es generell möglich ist, eine entsprechende Begründung aus der realen Welt zu erhalten. Die Begründung für den Ansatz einer Proportionalität sowohl beim exponentiellen als auch beim beschränkten Wachstum ist eher mathematischer Natur. Die jeweilige Abhängigkeit der Änderung einer Größe y zum vorhergehenden Bestand kann allgemein mit Hilfe einer Funktion f in einer Differenzialgleichung angegeben werden:

$$y' = f(y) \quad (2.12)$$

Sofern der Bestand 0 ist, kann keine Änderung mehr stattfinden. Es wird an einem stationären Punkt mit $y = 0$ operiert:

$$f(0) = 0 \quad (2.13)$$

⁸Jahnke / Wuttke 2002 [16] S. 172

⁹Griesel / Postel / Suhr 2001 [11] S. 300. Hier ist zusätzlich zu bemerken, dass die Bedingung $G > f(t)$ nicht notwendig ist.

¹⁰Kroll / Vaupel 1989 [19] S. 88

Ist f differenzierbar, so gilt in der Nähe von $y = 0$:

$$f(y) \approx y \cdot f'(0). \quad (2.14)$$

Die Funktion f kann somit durch eine lineare Funktion approximiert werden. Abhängigkeitssätze aus der Theorie der Differentialgleichungen garantieren, dass eine Lösung von (2.12) beliebig nahe bei einer geeigneten Lösung von (2.14) liegt.¹¹

Logistisches Wachstum

Der Abgleich mit realen Entwicklungen zeigt, dass auch das beschränkte Wachstum seine Schwächen hat. Zwar ist es realistisch, dass Populationen im Laufe der Zeit bei begrenzten Ressourcen nicht unendlich wachsen können, der „Bremsmechanismus“ ist jedoch genauer zu betrachten. Der Anstieg der Populationsgröße entspricht zu Anfang mehr dem Verhalten bei exponentiellem Wachstum. Es beginnt verhalten, wird allerdings schneller und schneller. Bei begrenzten Ressourcen wird der Bremsmechanismus, der dafür sorgt, dass das Wachstum der Population wieder zurück geht, bei zunehmender Größe stärker. Bezogen auf den Zuwachs bzw. die Änderung $\frac{dB_3}{dt}$ der Populationsgröße bedeutet dies, dass diese proportional sowohl zum Bestand als auch zum Sättigungsmanko $K - B_3$ angenommen wird.¹²

$$\frac{dB_3}{dt} = r \cdot B_3 \cdot (K - B_3), \quad r \in \mathbf{R} \wedge K \text{ const.} \quad (2.15)$$

In dieser Gleichung steht K für die Kapazität des Lebensraumes, also die maximal mögliche Anzahl an Individuen, die das Biotop tragen kann. Bezüglich der Dimensionen bedeutet dies:¹³

$$\frac{\text{Populationsumfang}}{\text{Zeit}} = r \cdot \text{Populationsumfang} \cdot \text{Populationsumfang} \quad (2.16)$$

Aus Dimensionsgründen wird r in der Dimension Zeit^{-1} angegeben und in der hinteren Klammer die Differenz relativ zu $K = 1$ betrachtet.¹⁴

$$\frac{dB_3}{dt} = r \cdot B_3 \cdot \left(1 - \frac{B_3}{K}\right), \quad r \in \mathbf{R}^+, K > 0 \quad (2.17)$$

Diese Differentialgleichung geht auf P. F. VERHULST¹⁵ zurück, der sie 1838 aufstellte. Sie wird daher **Verhulstgleichung** genannt.¹⁶ Die Lösung der Differenzialgleichung lautet:

$$B_3(t) = \frac{K \cdot B_3(0)}{B_3(0) + (K - B_3(0)) \cdot e^{rt}} \quad (2.18)$$

Diese Funktion wird als **logistische Wachstumsfunktion** bezeichnet. Der typische Verlauf einer logistischen Wachstumsfunktion ist Abbildung 2.3 zu entnehmen.

¹¹vgl. Walcher 2003 [33] Satz 2.2.7

¹²Bohl 2001 [4] S. 7ff

¹³Bohl 2001 [4] S. 8ff

¹⁴Bohl 2001 [4] S. 8ff

¹⁵Pierre-Francois Verhulst 1804 -1849

¹⁶vgl. Verhulst 1838 [32]

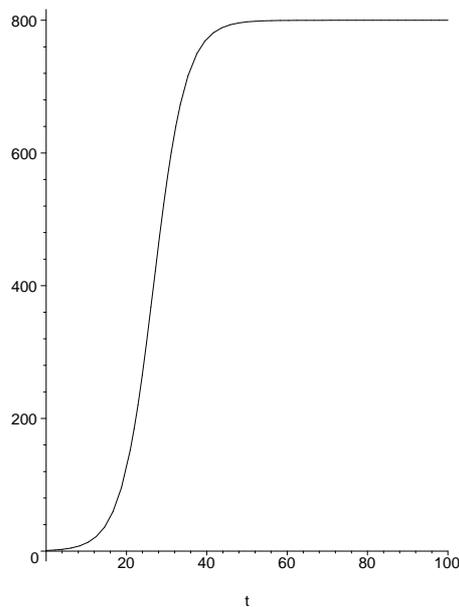


Abbildung 2.3: Logistisches Wachstum

In Schulbüchern wird diese Wachstumsfunktion über die Annahme der proportionalen Abhängigkeit des Zuwachses bzw. der Änderung von sowohl Bestand als auch Sättigungsmanko hergeleitet, wie das folgende Beispiel eines diskreten Zugangs zeigt.

„Der Zuwachs ist proportional zum Bestand x_n **und** der Differenz des Bestandes x_n und einer Obergrenze G .

$$Z = r \cdot x_n (G - x_n)$$

Logistisches Wachstum

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + r \cdot x_n (G - x_n) \\ &= x_n (1 + r(G - x_n)) \end{aligned}$$

Der Wachstumsfaktor wird kleiner.“¹⁷

In manchen Fällen wird die Begründung aus dem Vergleich der bisherigen Wachstumsfunktionen mit der Realität gezogen:

„Während beim exponentiellen Ansatz [...] die Verbreitung der Handys anfänglich gut beschrieben wird, wird mit dem beschränkten Ansatz [...] das Abflachen der Entwicklung sinnvoll erfasst.

Wir versuchen beide Ansätze zu kombinieren:

$$B_3'(t) = cB_3(t) \cdot (K - B_3(t)).$$

Nach diesem Ansatz ist also die Wachstumsgeschwindigkeit $B_3'(t)$ zum Produkt aus Bestand $B_3(t)$ und Sättigungsmanko $M(t) = K - B_3(t)$ proportional.

Statt eine Funktion B_3 zu bestimmen, die die Gleichung [...] erfüllt, ist es - wie sich zeigen wird - technisch einfacher, zunächst die Funktion $D = \frac{1}{B_3}$ zu bestimmen.[...]¹⁸

¹⁷Lergenmüller / Schmidt 2004 [21] S. 207

¹⁸Jahnke / Wuttke 2002 [16] S. 174

Wie bereits bei den anderen Wachstumsfunktionen fehlt auch hier eine Begründung mit biologischen Fakten bzw. realistischen Zusammenhängen. Sogar in Lehrbüchern zur mathematischen Biologie fehlen solche Grundlegungen:

„[...]However if we consider the past and predicted growth estimates for the total world population from 17th to the 21st centuries it is perhaps less unrealistic as seen in the following table.[...]

In the long run of course there must be some adjustment to such exponential growth. Verhulst in 1836 proposed that a self-limiting process should operate when a population becomes too large. He suggested

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K),$$

where r and K are positive constants. This is called logistic growth in a population. In this model the per capita birth rate is $r(1 - N/K)$, that is, it is dependent on N . The constant K is the carrying capacity of the environment, which is usually determined by the available sustaining resources.“¹⁹

Abschließend lässt sich festhalten, dass sowohl in Schul- als auch in Lehrbüchern eine Grundlegung der Modellannahmen durch realistische Beobachtungen nicht geliefert wird. Die Annahmen werden auf allgemeinen Feststellungen aufgebaut. Es erfolgt lediglich ein Abgleich der entwickelten Modelle mit realen Daten.

Die hier aufgeführten Wachstumsmodelle beschreiben stets den Bestand einer Population, sie werden daher auch *Bestandsmodelle* genannt. Eine weitere Gemeinsamkeit aller drei Modelle liegt darin, dass der Bestand zeitkontinuierlich dargestellt wird. Zwar sind in einem der Schulbücher diskrete Modelle dargestellt, was allerdings daran liegt, dass in der entsprechenden Alterstufe (Klasse 10) eine Lösung der Differenzialgleichungen nicht möglich ist, die diskreten Modelle aber mit Hilfe einer Tabellenkalkulation untersucht werden können.²⁰ Zu bemerken ist hierbei natürlich, dass sich auch diese Bestandsmodelle als diskrete Modelle nutzen lassen. In der Regel wird - zumindest in der Schule - die jeweilige Wachstumsfunktion aber als stetige Funktion behandelt. Das Endergebnis bei Anwendungsaufgaben wird dann der jeweiligen Aufgabenstellung angepasst. Ein in der Biologie sehr anerkanntes Modell, das sich von beiden Gemeinsamkeiten unterscheidet, ist das sogenannte Ricker-Modell, das im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

2.1.2 Das Ricker-Modell

Im Gegensatz zu den meisten der bisher diskutierten Modelle handelt es sich bei dem Rickermodell um ein diskretes Modell. Das bedeutet, dass die Generationen in diskreten Zeitschritten aufeinander folgen und der Bestand in jedem Generationsschritt neu ermittelt wird. Die Berechnung erfolgt mit einer sogenannten Reproduktionsfunktion, die der Anzahl an Individuen in einer Generation die Anzahl ihrer Nachfolger zuordnet. Das Modell wurde benannt nach seinem Entwickler W. E. RICKER., der es 1954 veröffentlichte.²¹ Ricker untersuchte die Nachkommenzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit zur Elterngeneration. Die Auswertung der Daten ergab ein charakteristisches Bild für die Reproduktionsfunktion und führte schließlich zu einer geschlossenen

¹⁹Murray 1993 [25] S. 2

²⁰vgl. Lergenmüller / Schmidt 2004 [21] S. 207ff

²¹vgl. Ricker 1954 [26]

Darstellung der Reproduktionsfunktion.²²

$$R(n) = c_1 \cdot n \cdot e^{-c_2 n}; c_1, c_2 > 0 \quad \text{const.} \quad (2.19)$$

Der Verlauf dieser Reproduktionsfunktion wird in der folgenden Abbildung dargestellt.

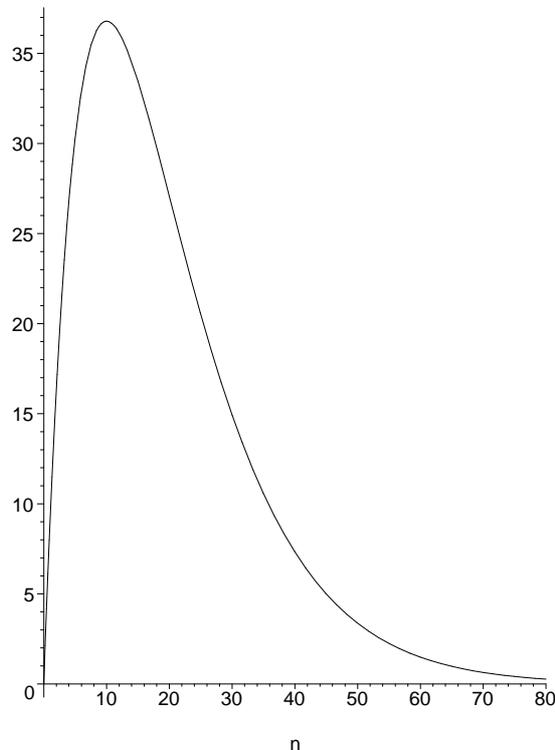


Abbildung 2.4: Reproduktionsfunktion mit $c_1 = 10$ und $c_2 = 0,1$

Das diskrete Modell, in dem der Bestand B jeder neuen Generation in jedem Zeitschritt ermittelt wird, lautet:

$$\begin{aligned} B(0) &= B_0 \\ B(t+1) &= R(B(t)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Bei der Vorgehensweise von Ricker zur Herleitung seines Modells muss festgestellt werden, dass er auf Basis seiner Messergebnisse versucht hat, eine Funktion zu finden, die den Verlauf der Daten möglichst gut beschreibt. Seine Begründung für die gewählte Funktion hinsichtlich allgemeiner biologischer Mechanismen und eine konkrete Bestimmung der Parameter im Modell aus der realen, beobachteten Situation ist zumindest nicht in allen Teilen erfolgreich. Dennoch zählt dieses Modell in der Biologie seit seiner Entwicklung mit zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen.

2.1.3 Zusammenfassung

Bei sämtlichen hier beschriebenen Modellen fehlt in der Herleitung eine Begründung der Annahmen aus der realen Situation. Die Annahme von Proportionalität basiert einerseits auf der Überlegung, dass es sich dabei um den einfachsten Zusammenhang handelt

²²Eine Ausführliche Darstellung der Herleitung nach Ricker ist im Anhang zu finden.

und der Erkenntnis, dass die entstandenen Modelle die Realität recht gut beschreiben. Dennoch erscheint es notwendig, diese Vorgehensweise in Frage zu stellen. Die Entwicklung eines Modells sollte auf Annahmen basieren, die auf Beobachtungen der Realität gründen. Es ist daher unabdingbar, die reale Situation näher zu betrachten und zunächst ein Konzeptmodell zu erstellen, mit dem weiter gearbeitet werden kann. Im folgenden Abschnitt werden daher die biologischen Grundlagen dargestellt, die bei der Entwicklung von Populationen unter Konkurrenzbedingungen zu beachten sind.

2.2 Biologische Grundlagen

Wie im vorhergehenden Abschnitt festgestellt, kann ein sinnvolles Modell nur aus der Beobachtung der Realität erwachsen. Im Folgenden werden daher Fallbeispiele aus der Biologie für die Entwicklung einer Population unter intraspezifischer Konkurrenz dargestellt. Zunächst wird allgemein auf die Wechselwirkungen zwischen Populationen bzw. Individuen in Ökosystemen eingegangen, später werden dann Konkurrenzeffekte und dabei insbesondere intraspezifische Konkurrenz beschrieben. Die Darstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, vielmehr werden grundlegende Zusammenhänge dargestellt, die die Entwicklung eines einfachen Konzeptmodells ermöglichen.

2.2.1 Wechselwirkungen zwischen und innerhalb von Spezies

Populationen leben in komplexen Ökosystemen. Innerhalb dieser Ökosysteme treten zwischen den einzelnen dort vertretenen Individuen unterschiedliche Beziehungen auf. Diese Beziehungen können dabei positive, aber auch negative Effekte für die beteiligten Individuen mit sich bringen. Beispielsweise sind symbiotische Beziehungen wie zwischen Seeanemone und Einsiedlerkrebs (vgl. Abb. 2.5) für beide Individuen von Vorteil. In manchen Beziehungen profitiert nur ein Individuum, wie beispielsweise ein Parasit.

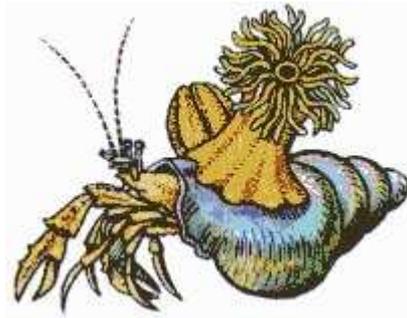


Abbildung 2.5: Symbiose zwischen Einsiedlerkrebs und Seeanemone

Immer dann, wenn die Bedürfnisse einzelner Individuen einander entgegen stehen, kann es zu Konkurrenzsituationen kommen. Beispielsweise tritt dies auf, wenn zwei Räuber dem gleichen Beutetier nachstellen. Pflanzen stehen in einem dicht bewachsenen Areal bezüglich des Zugangs zum Licht in Konkurrenz. Diese Konkurrenzsituationen können sowohl inter- als auch intraspezifisch auftreten. Im Folgenden werden intraspezifische Konkurrenzphänomene genauer betrachtet. Die Reduktion auf intraspezifische Konkurrenz erfolgt im Hinblick auf das Ziel ein möglichst einfaches Modell auf der Basis von Beobachtungen aus der Realität zu erstellen.

2.2.2 Konkurrenzphänomene

Das Zusammenleben von Individuen einer Spezies in einem begrenzten Lebensraum führt, wie bereits kurz beschrieben, teilweise zu Konkurrenzphänomenen. Bei sich überschneidenden Ressourcen bezüglich Nahrungsmittel und/oder Lebensraum treten diese Konkurrenzeffekte auf. Diese Phänomene können sich für nur einen aber auch für beide Konkurrenten negativ auswirken. Entweder wird der jeweils in der Situation Stärkere den anderen dominieren und durch Reduzierung der Ressourcen schädigen oder beide benachteiligen sich durch den Konkurrenzkampf gegenseitig. Die Auswirkungen dieser Effekte sind unterschiedlich. Sie reichen von Dezimierung der eigenen Population durch Kannibalismus, wie er bei manchen Fischen oder auch Vögeln beobachtet werden kann, über Reduktion des Wachstums der jeweiligen Individuen bis hin zu Veränderungen der Wachstumsrate in Abhängigkeit von der aktuellen Dichte der Population. Allgemein gesehen sorgt die Konkurrenz langfristig zu einer Korrektur der Populationsgröße in Relation zu den zur Verfügung stehenden Ressourcen.

Dichteabhängige Faktoren beim Populationswachstum

Bei vielen Populationen ist zu beobachten, dass die Wachstumsrate durch die Populationsdichte beeinflusst wird. Bei zunehmender Dichte wird durch unterschiedliche Mechanismen die Wachstumsrate reduziert.²³ Dies geschieht entweder durch die Herabsenkung der Reproduktionsfähigkeit oder durch eine erhöhte Mortalität. Diese Regelung der Wachstumsrate wird sowohl durch exogene als auch durch endogene Faktoren gesteuert.

Bei Singvögeln wie beispielsweise der Kohlmeise (*Parus major*) kann beobachtet werden, dass bei zunehmender Dichte in einem festgelegten Lebensraum die Anzahl der gelegten Eier bei den Weibchen abnimmt.²⁴ Dies ist auf die geringere Nährstoffverfügbarkeit zurück zu führen. Ähnliches ist bei Mais (*Zea mays*) festgestellt worden. Hier nimmt die Samenmenge auf den Kolben bei zunehmender Organismendichte ab.

Die Fertilität einer Population kann also, wie die Beispiele zeigen, durch die Dichte negativ beeinflusst werden.

Ist der Lebensraum begrenzt, so kann dies in der Fauna zur Folge haben, dass notwendige Unterschlupfmöglichkeiten zum Schutz vor Räubern oder aber auch geeignete Plätze zur Aufzucht und Pflege der Jungtiere fehlen. Bei Meeresvögeln, wie dem Basstölpel (*Sula bassana*), die auf Felsinseln nisten, ist dies der Fall [vgl. Abb. 2.6]. Solange die Populationsdichte einen entsprechenden Grenzwert nicht übersteigt, haben alle Paare genug Platz zum Nisten.²⁵ Durch den verfügbaren Platz ist somit die Anzahl der erfolgreichen Paarungen beschränkt. Die Fertilität der Population wird durch die Dichte beeinflusst.

²³vgl. Campbell 1997 [6] S. 1208 ff.

²⁴vgl. Campbell 1997 [6] S. 1208

²⁵vgl. Campbell 1997 [6] S. 1208 ff.



Abbildung 2.6: Töpelkolonie

Neben der Reduzierung der Nachkommenschaft kommt es auch vor, dass die Mortalität der Population bei zu hohen Dichten zunimmt. Bei der Fruchtfliege (*Drosophila melanogaster*) konnte beobachtet werden, dass bei steigender Dichte die Mortalität der Larven ebenso zunimmt wie der Gewichtsverlust adulter Weibchen. Leichtere und somit weniger robuste Weibchen sind anfälliger für Krankheiten.

Nicht nur die beschriebenen exogenen Faktoren spielen eine Rolle, sondern auch endogene. Es konnte beispielsweise bei Mäusen, Waldmurmeltieren und Kaninchen beobachtet werden, dass sich bei hoher Dichte aufgrund von Stress eine hormonelle Veränderung negativ auf Geschlechtsreife, Reproduktionsorgane (Schrumpfen) und das Immunsystem auswirken. Dieser Effekt trat auch ein, wenn die wichtigsten Ressourcen wie Nahrung und Unterschlupf in genügender Menge vorhanden waren.²⁶

Sämtliche Beobachtungen lassen sich etwas überspitzt unter folgende Feststellung subsumieren.

Feststellung 1:

EINE HOHE ORGANISMENDICHTE EINER POPULATION KANN SICH NEGATIV AUF DIE INDIVIDUELLE FORTPFLANZUNGSRATE AUSWIRKEN. BEI GENÜGEND HOHER DICHT PFLANZT SICH KEIN INDIVIDUUM MEHR FORT.

Aktive Auseinandersetzung mit dem Konkurrenten

Sowohl in Fauna als auch in Flora sind Phänomene zu beobachten, bei denen sich Individuen aktiv mit ihren Konkurrenten auseinandersetzen und durch aggressive Strategien einen Vorteil im Konkurrenzkampf zu erreichen. Dieses Verhalten wird in der Pflanzenwelt *Allelopathie* genannt. Es handelt sich dabei um

„Wechselwirkungen zwischen Pflanze und Nachbarpflanzen derselben oder anderer Arten, die deren Wachstum und Entwicklung behindern.“²⁷

Der Walnussbaum (*Juglans regia*) setzt einen Wirkstoff, das sogenannte *Juglon*, ein, um das Keimen anderer Pflanzen - also späterer Konkurrenten - zu hemmen [vgl. Abb. 2.7]. Das Juglon gelangt über herabgefallene Blätter auf den Boden und wird dort vom Regenwasser in den Boden geschwemmt.²⁸ Der Apfelbaum gibt über seine Wurzeln *Phlorizin* in

²⁶vgl. Campbell 1997 [6] S. 1208 ff.

²⁷vgl. wissenschaft-online [40]

²⁸vgl. geoscience-online [38]

den Boden ab. Durch die Mikroflora des Bodens aktiviert, entstehen *Phloroglucin*, *Phloretin* und phenolische Säuren. Diese Stoffe hindern andere Apfelbaumkerne am Keimen. Der Boden ist sogar noch lange Zeit nach dem Abholzen des Baumes kontaminiert, so dass dort weiter keine Apfelbäume wachsen können.



Abbildung 2.7: Keimung mit Walnussblattextrakt (links) und Wasser

Ähnliche Wechselwirkungen lassen sich auch beim Weißen Steinklee (*Milolotus alba*) und beim Wermut (*Artemisia absinthium*) beobachten. Diese Pflanzen sondern in der Keimungsphase Stoffe ab, die sich hemmend auf die Keimung eigener, aber auch artfremder Samen auswirken.²⁹

Auch im Tierreich sind entsprechende Konkurrenzeffekte zu entdecken. Bei Greif- bzw. Raubvögeln ist der sogenannte *Kainismus* sehr verbreitet.³⁰ Hierbei handelt es sich um das Phänomen, dass schwächere Geschwister von ihren stärkeren Geschwistern im Nest getötet werden. Beispielsweise konnte dieses Verhalten bei Steinadlern, Rohrweihen³¹ und anderen Raubvögeln beobachtet werden. Vom Kuckuck ist bekannt, dass er seine Eier in Nester anderer - vorzugsweise kleinerer - Vögel ablegt. Hierbei legt er stets nur ein Ei in ein Nest. Es wird vermutet, dass dies zum Schutz vor Kainismus geschieht.

Es ist festzustellen, dass aufgrund von intraspezifischer Konkurrenz in manchen Fällen aktiv auf den Konkurrenten eingewirkt wird, so dass dieser zu Schaden kommt, bzw. stirbt. Beide Phänomene, die Allelopathie, aber auch der Kainismus lassen sich unter folgender Feststellung subsumieren.

Feststellung 2:

IM DIREKTEN KONKURRENZKAMPF KOMMT ES VOR, DASS EINER UND NUR EINER DER KONKURRENTEN SICH DURCHSETZT UND FORTPFLANZT.

2.2.3 Zwischenergebnis

Wie beschrieben kann sich intraspezifische Konkurrenz auf unterschiedliche Weisen manifestieren und dadurch auch unterschiedliche Effekte haben. Die vorgestellten Phänomene dienen hier lediglich als Anhaltspunkte zur weiteren Vorgehensweise. Die Beobachtungen liefern zwei unterschiedliche Ausprägungen, die in den Feststellungen 1 und 2 zusammengefasst sind. Mit Hilfe dieser Feststellungen soll nun im nächsten Abschnitt ein Konzeptmodell als Grundlage für stochastische Simulationen entwickelt werden.

²⁹vgl. Sinsch [39] S. 8

³⁰vgl. Bundesamt für Naturschutz [36]

³¹vgl. Bundesamt für Naturschutz [37]

2.3 Modellierung

Nun soll das zu modellierende System stark vereinfacht werden. Hierbei müssen wichtige von unwichtigen Komponenten unterschieden werden. Erstes Ziel dieser Modellierung ist ein Konzeptmodell zu entwickeln, mit dem weitere Untersuchungen angestellt werden können.

2.3.1 Population und Lebensraum

Die Komplexität eines Lebensraumes, in dem eine Population lebt, macht es unmöglich, die Gesamtheit aller Faktoren, die für die Entwicklung der Population relevant sind, in einem Modell zu berücksichtigen. Aus diesem Grund wird bei der Entwicklung des Modells eine starke Vereinfachung der Abhängigkeiten skizziert, die unter Umständen nur noch als „Karikatur“ der Wirklichkeit zu bezeichnen ist.

Die erste Vereinfachung im Rahmen der Modellierung besteht darin, dass eine einzige Population betrachtet wird. Sämtliche Einflüsse anderer Spezies, seien es nun aktive (Räuber), passive (Beutetiere), direkte (Konkurrenz um Lebensraum) oder indirekte (Lebewesen auf weiter entfernten Positionen in der Nahrungskette) werden nicht beachtet. Es wird somit der Konkurrenzaspekt auf die in 2.1 beschriebene intraspezifische Konkurrenz reduziert.

Ferner wird die Population in einem begrenzten Lebensraum beobachtet. Dieser Lebensraum wird durch ein rechteckig ausgerichtetes System von „Kästchen“ modelliert.

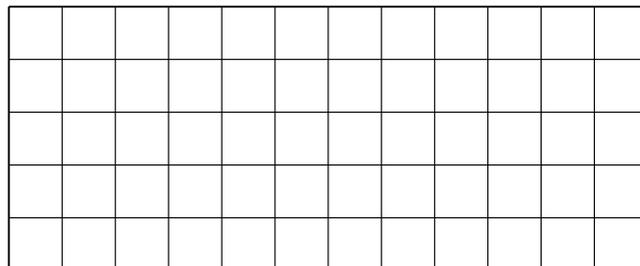


Abbildung 2.8: Eine Veranschaulichung des begrenzten Lebensraums als Anordnung von Kästchen.

Die einzelnen Kästchen sind dabei als voneinander getrennt und ohne räumliche Beziehung zu sehen. Sie können je nach Anwendung des Modells unterschiedlich interpretiert werden.³² Die Anzahl der Kästchen ist im Modell ein Parameter, mit dem die Größe des Lebensraumes beschrieben wird und soll mit N bezeichnet werden. Die Individuen werden dann innerhalb dieser Kästchen als Punkte symbolisiert.

In einem weiteren Vereinfachungsschritt wird der Effekt der Konkurrenz dahingehend fokussiert, dass sie sich lediglich auf die Fortpflanzungsfähigkeit der Individuen, dort aber total, auswirkt. Die Fortpflanzungsfähigkeit wird in diesem Zusammenhang durch die Anzahl der Nachkommen bestimmt.

Ausgehend von einer Anfangspopulation mit n_0 reproduktionsfähigen Individuen ist eine langfristige Entwicklung in diskreten Zeitschritten modellierbar. In diesem Zusammenhang wird im Modell ferner davon ausgegangen, dass die Lebensdauer einer Generation

³²Im weiteren Verlauf der Darstellung werden entsprechende Interpretationen vorgestellt.

genau einem Zeitschritt entspricht.³³ Der Generationszyklus wird am Beispiel einer Blumenpopulation verdeutlicht. Zur weiteren Vereinfachung wird von folgender Grundannahme ausgegangen.

Grundannahme 0:

Ein Individuum ist entweder voll oder nicht reproduktionsfähig. Bei voller Reproduktionsfähigkeit werden genau q Nachfolger produziert.

Im Beispiel der Blumenpopulation gibt der Reproduktionsfaktor q die Anzahl der Samen an, die eine (voll) reproduktionsfähige Pflanze trägt.

1. Zum Zeitpunkt t_i liefern die n_i reproduktionsfähigen Pflanzen $n_i \cdot q$ Samen. Diese werden zufällig auf N Kästchen verteilt.³⁴
2. Je nach Auswirkung der Konkurrenz entwickeln sich manche der Samen zu reproduktionsfähigen Pflanzen, andere nicht. In der neuen Generation sind n_{i+1} Individuen reproduktionsfähig. (Als neue Generation werden lediglich die Individuen gezählt, die reproduktionsfähig sind!) Hiernach wiederholt sich der Vorgang.

Im nächsten Abschnitt wird die Modellierung der Konkurrenz näher betrachtet.

2.3.2 Konkurrenz

Im Modell wird davon ausgegangen, dass sich die intraspezifische Konkurrenz ausschließlich auf die Fortpflanzungsfähigkeit der einzelnen Individuen auswirkt. Wie im Kapitel 2.1 schon ansatzweise beschrieben, findet man in der Natur diverse Beispiele, bei denen dieser Effekt beobachtet werden kann. Die unterschiedlichen Ausprägungen können zu zwei Hauptvarianten zusammengefasst werden. In der einen Variante führt die erhöhte Dichte von Individuen zu negativen Einflüssen auf die Fortpflanzungsfähigkeit. Hier sei nochmals an das Beispiel der Mauspopulation erinnert.³⁵ Die Konkurrenz um den Lebensraum führt dabei zu einer so starken Beeinflussung der konkurrierenden Individuen, dass sie nicht mehr fortpflanzungsfähig sind. Übertragen auf das Modell mit der Aufteilung in Kästchen wird folgende Grundannahme festgehalten:

Grundannahme 1:

Die einfach besetzten Kästchen, und nur diese, bringen genau ein voll reproduktionsfähiges Individuum hervor.

Diese Grundannahme zusammen mit Grundannahme 0 wird im weiteren Verlauf als **Konkurrenzmodell 1** bezeichnet.

In der anderen Variante entsteht durch die Konkurrenz eine Auseinandersetzung zwischen den einzelnen Individuen, bei der ein Individuum als stärkstes hervorgeht und volle Fortpflanzungsfähigkeit besitzt. In diesem Zusammenhang sei an das Phänomen des „Brudermordes“ unter Jungvögeln erinnert³⁶. Die Umsetzung dieses Konkurrenzphänomens auf das Modell wird in der zweiten Grundannahme, dem **Konkurrenzmodell 2** festgehalten:

Grundannahme 2:

Jedes mindestens einfach besetzte Kästchen bringt genau ein voll reproduktionsfähiges Individuum hervor.

³³Entsprechendes kann bei manchen Insekten- aber auch einigen Blumenarten beobachtet werden.

³⁴Hier wird von einer Gleichverteilung ausgegangen.

³⁵vgl. Abschnitt 2.2.2

³⁶vgl. Abschnitt 2.2.2

Mit den zwei Konkurrenzmodellen ist nun ein stochastisches Modell entstanden, das die zeitliche Entwicklung einer Population unter dem Einfluss intraspezifischer Konkurrenz simuliert.

2.3.3 Zusammenfassung

An dieser Stelle soll nochmals das gesamte Modell in kompakter Form dargestellt werden. Ausgangspunkt ist dabei die Modellierung des begrenzten Lebensraumes in Form eines Feldes mit N Kästchen. Im Folgenden wird daher vom „Kästchenmodell“ gesprochen. Die Parameter in diesem Modell sind:

Parameter *Bedeutung*

N	Anzahl der Kästchen
q	Reproduktionsfaktor
n_0	Größe der Startpopulation

Der Ablauf der Simulation in diskreten Zeitschritten wird durch das folgende Schaubild verdeutlicht.

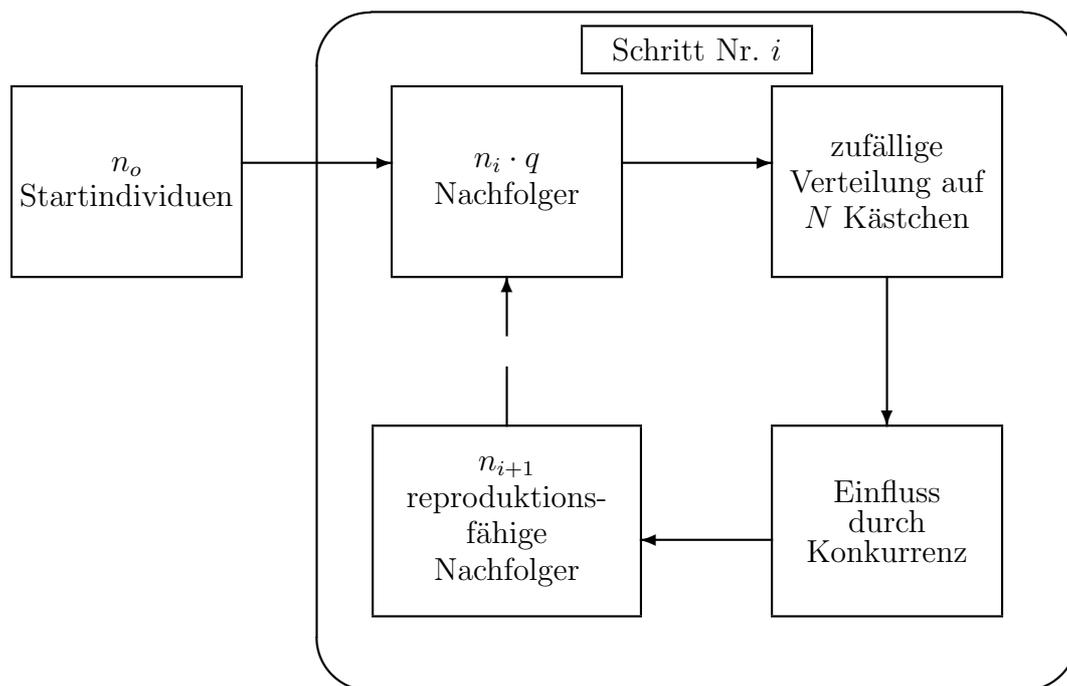


Abbildung 2.9: Diagramm zur Darstellung des Konzeptmodells

Im konkreten Simulationsdurchlauf muss neben den Parametern auch das gewählte Konkurrenzmodell angegeben werden, da sich je nach Modell die Anzahl der reproduktionsfähigen Nachkommen unterscheidet.

Wie bereits zu Beginn des Abschnittes erläutert, ist in dem entstandenen Modell die Realität sehr idealisiert und vereinfacht. Es handelt sich eher um eine Metapher der realen Situation. Die oben durchgeführten Vereinfachungen und Reduktionen erleichtern aber den Umgang mit dem Modell, da so der Einfluss von Parametern direkter erkennbar wird. Eine solche Vorgehensweise ist in der mathematischen Biologie üblich.³⁷

³⁷vgl. Kapitel 1

Das bislang entwickelte Konzeptmodell zur Simulation einer Population unter intraspezifischer Konkurrenz ist als stochastisches Modell auf dem Computer in Form von Simulationstools umsetzbar. In Abschnitt 2.4 werden die entwickelten JAVA-Implementationen näher beschrieben und Möglichkeiten zum Einsatz im Unterricht an der Schule vorgestellt.

2.4 Arbeiten mit den Simulationstools

2.4.1 Beschreibung der Simulationstools

Es wurden insgesamt fünf Simulationstools entwickelt, wobei sich das erste auf beide Konkurrenzmodelle bezieht und je Konkurrenzmodell zwei weitere Tools realisiert wurden. Die Funktionsweisen der einzelnen Tools werden im Folgenden kurz dargestellt.

Das Basistool: Populationen in begrenztem Lebensraum

Das Basistool ist eine konkrete Umsetzung des Konzeptmodells, dem sogenannten „Kästchenmodell“. Auf der Benutzeroberfläche findet man 100 Kästchen, die in 10 x 10 Reihen und Spalten angeordnet sind. Die Größe des Lebensraumes ist mit 100 Kästchen festgesetzt und kann nicht variiert werden. Dieses erste Tool dient zur Verdeutlichung des entwickelten Konzeptmodells. Eine Variation der Kästchenanzahl ist in dieser Phase noch nicht notwendig, da der Schwerpunkt hier auf der Visualisierung des Generationenwechsels liegt. Effekte, die auf der Änderung des Parameters N beruhen, sind in der Regel erst bei langfristigen Beobachtungen zu erkennen und werden durch andere Tools verdeutlicht. Der Benutzer kann die Parameter für die Größe der Startpopulation (n_0) und den Reproduktionsfaktor (q) angeben. Zusätzlich muss man sich für eines der vorstehenden Konkurrenzmodelle entscheiden.



Abbildung 2.10: Screenshot der Arbeitsumgebung des Basistools

Die Simulationen laufen in diskreten Zeitschritten ab, wobei jeder Schritt nochmals in zwei Teilschritte unterteilt ist.

Im ersten Schritt wird die Anzahl der neuen Individuen bestimmt. Diese werden mittels

eines Zufallsgenerators auf die 100 Kästchen verteilt. Mit den voreingestellten Werten aus Abb. 2.10 werden von einer Startpopulation mit einem Individuum 5 Nachfolger auf die Kästchen verteilt. Es ist hilfreich, sich diese Vorgehensweise wieder anhand einer Blumenpopulation zu verdeutlichen. Jede Blume der Elterngeneration trägt selbst $q = 5$ Samen, die dann auf die 100 Kästchen verteilt werden. Die Samen werden durch schwarze Punkte in den Kästchen symbolisiert. Die Anzahl der Punkte, die in einem Kästchen dargestellt werden können, ist begrenzt. Sollten mehr Individuen in einem Kästchen sein, so erscheinen die Punkte in blauer Farbe.

Im zweiten Teilschritt wird die Verteilung der Individuen entsprechend dem gewählten Konkurrenzmodell ausgewertet. Ist Konkurrenzmodell 1 gewählt worden, so werden sämtliche Kästchen grün gefärbt, in denen genau ein Punkt zu finden ist. Die Kästchen, in denen mehr als ein Punkt dargestellt ist, werden rot gefärbt. Wurde Konkurrenzmodell 2 gewählt, werden sämtliche Kästchen grün gefärbt, die mindestens einen Samen beinhalten. Die grün gefärbten Kästchen geben an, wo Individuen mit voller Reproduktionsfähigkeit sind. Die Anzahl dieser Kästchen ist demnach gleichzeitig die Größe der nächsten Elterngeneration, da pro „grünem“ Kästchen genau ein reproduktionsfähiges Individuum herangewachsen ist. Alle Kästchen werden „entleert“, damit die neuen Nachkommen auf die Kästchen im nächsten Zeitschritt verteilt werden können.

Im unteren Teil des Tools werden Größen wie die Anzahl der besetzten Kästchen und ähnliche Werte angezeigt, um ein konkretes Abzählen der Kästchen zu ersparen.

Dieses Basistool verdeutlicht die elementare Vorgehensweise des Kästchenmodells. Auswertungen und Analysen sind auf dieser Stufe nur schwer möglich und auch nur im begrenzten Umfang gewollt, da der Fokus hier auf dem Mechanismus im Modell liegt. Eine langfristige Betrachtung der Populationsgrößen wird durch die zwei folgenden Tools möglich.

Das Generationstool: Wie entwickeln sich Populationen im Laufe der Zeit?

Anschließend an das Basistools wird mit diesen Tools für jedes Konkurrenzmodell eine zeitliche Entwicklung der Modellpopulation simuliert. Da beide Tools hinsichtlich der Funktionalität identisch sind und sich nur in der Auswertung aufgrund der unterschiedlichen Konkurrenzmodelle unterscheiden, werden hier beide Tools in einem beschrieben.

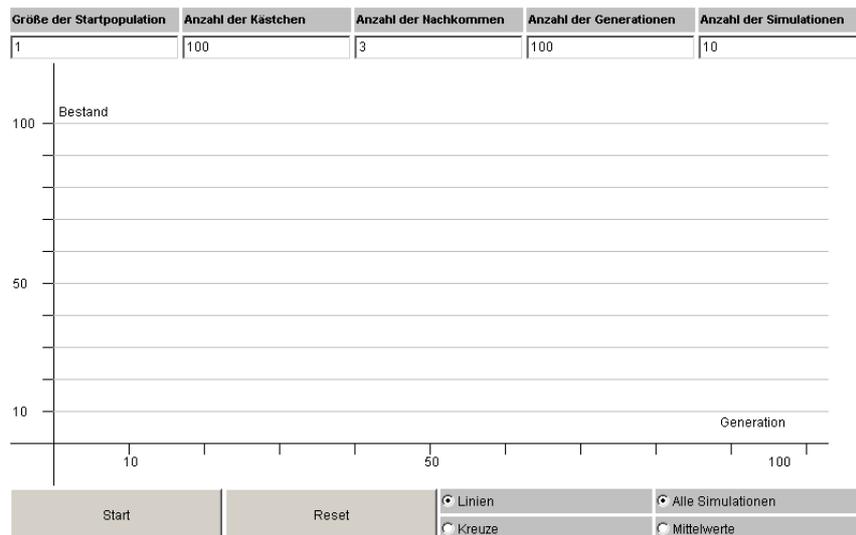


Abbildung 2.11: Screenshot der Arbeitsumgebung des Generationstools

Auf der Basis des Kästchenmodells wird ausgehend von einer Startpopulation, deren Größe der Benutzer angeben kann, eine Simulation über mehrere Generationen gestartet. Der Benutzer kann neben der Größe der Startpopulation nun auch die Größe des Lebensraumes in Form der Kästchenanzahl (N) angeben. Weiter hat er die Möglichkeit, den Reproduktionsfaktor (q) und die Anzahl der Generationen, die durchlaufen werden sollen, zu bestimmen. Mit dem Tool können parallel mehrere Simulationen gestartet werden, die Anzahl der parallelen Simulationen wird ebenfalls durch den Benutzer bestimmt. Die zeitliche Entwicklung der Populationsgröße kann nun auf verschiedene Arten dargestellt werden. Einerseits kann eine Liniendarstellung gewählt werden, wobei die einzelnen Werte für die Populationsgröße durch gerade Strecken verbunden werden. Andererseits kann auch ein Punkteplot gewählt werden, bei dem die einzelnen Ergebnisse in Form von kleinen Kreuzen visualisiert werden. Neben der graphischen Darstellung der Ergebnisse kann der Benutzer zusätzlich entscheiden, ob die Ergebnisse sämtlicher parallel durchgeführten Simulationen oder deren arithmetisches Mittel dargestellt werden soll. Je nach Konkurrenzmodell und eingegebenen Parametern ergeben sich unterschiedliche Grafiken. Der Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsvarianten öffnet in diesen Tools erste Möglichkeiten der Analyse und Auswertung. Eine Auswertung der Grafiken mit dem Ziel, ein geschlossenes mathematisches Modell zur Darstellung der Populationsgröße zu entwickeln, ist allerdings nicht möglich. Erst mit den Ergebnissen des nächsten Tools kann eine Mathematisierung begonnen werden.

Das Reproduktionstool: Wie viele reproduktionsfähige Nachkommen liefert eine Elterngeneration?

Ebenso wie bei der Darstellung der zeitlichen Entwicklung, sind auch hier die Tools für beide Konkurrenzmodelle äquivalent hinsichtlich Bedienung und Funktionalität und werden hier auch gemeinsam beschrieben.

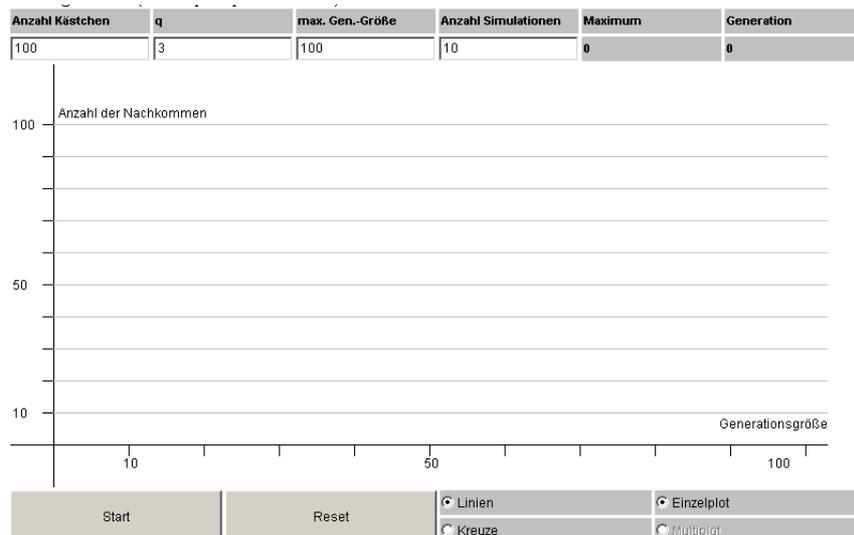


Abbildung 2.12: Screenshot der Arbeitsumgebung des Reproduktionstools

In diesem Tool wird die durchschnittliche Reproduktivität der Modellpopulation in Abhängigkeit von ihrer Größe dargestellt. Der Benutzer gibt die Größe des Lebensraumes durch die Anzahl der Kästchen, sowie den Reproduktionsfaktor, die Anzahl der parallel ablaufenden Simulationen und auch die maximale Größe einer simulierten Population vor. Für Populationen der Größe 1 bis zur angegebenen Maximalgröße wird hier in mehreren Simulationen parallel ermittelt wie groß im Mittel die Nachfolgegeneration ist, wobei diese Größe durch die reproduktionsfähigen Nachkommen bestimmt wird. In einer Grafik wird dann die Relation zwischen der Größe der Elterngeneration und der Anzahl der Nachkommen dargestellt. In diesem Tool kann der Benutzer zwischen den Darstellungsvarianten Punkteplot oder Linienplot wählen. Die Option „neu zeichnen“ bedeutet hier, dass bei erneuter Durchführung der Simulationen die bisher gezeichnete Grafik gelöscht und ein neuer Plot gezeichnet wird. Ist diese Option ausgeschaltet, werden alle weiteren Plots zu den bisher gezeichneten Grafik hinzugefügt. Dadurch wird ein Vergleich mehrerer Simulationsergebnisse mit unterschiedlichen Parametern möglich. Die Ergebnisse der Simulationen in diesem Tool sind Ausgangspunkt einer Analyse, die schließlich zu einem deterministischen Modell führt. Dazu ist es möglich die im Plot dargestellten Daten in eine Tabellenkalkulation zu exportieren. Zunächst muss dazu mit dem Cursor die Zeichenfläche angeklickt werden. Durch die Tastenkombination [Shift-T] wird ein Dialog-Fenster geöffnet, in dem die Daten der aktuellen Reproduktionskurve (bei mehreren dargestellten Kurven die jeweils letzte) in Tabellenform dargestellt werden. Mittels [Ctrl-C] kann die zuvor markierte Tabelle über den Zwischenspeicher in das Tabellenkalkulationsprogramm exportiert werden.

Im nächsten Abschnitt wird ein möglicher Einsatz der Tools im Rahmen einer Unterrichtsreihe vorgestellt. Dabei wird die Analyse der Ergebnisse mit Hilfe von Techniken aus der Schulmathematik erläutert.

2.4.2 Analyse der Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt wird dargelegt, wie mit Hilfe der Simulationstools letztendlich ein deterministisches Modell hergeleitet werden kann. Die hierbei nötigen mathematischen Fertigkeiten übersteigen in der Regel nicht den in der Schule üblichen Stoff in der Mathematik der Oberstufe. Es soll hier aber auf konkrete unterrichtliche Hinweise verzichtet

werden. Diese werden in einem späteren Kapitel dargestellt.

Wie bereits in anderen Kapiteln wird auch hier die Terminologie an dem anschaulichen Beispiel der Blumenpopulation orientiert.

Analysen zu Konkurrenzmodell 1

Im Basistool können bereits erste Erkenntnisse für unterschiedliche Parameterwerte gewonnen werden. So kann festgestellt werden, dass bei kleineren Reproduktionsfaktoren (etwa bis $q = 5$) der Bestand langfristig nahe an einem festen Wert bleibt. Bei etwas höheren Reproduktionsfaktoren können 2er-Zyklen beobachtet werden, bei denen der Bestand zwischen hohen und niedrigen Zahlen wechselt. Wird der Reproduktionsfaktor jedoch groß gewählt (etwa $q > 20$), so stirbt die Population in der Regel nach einigen Generationen aus. Die Erklärungen dafür sind auf diese Ebene eher anschaulich. So wird der Wechsel zwischen hohen und niedrigen Beständen mit der Konkurrenz erklärt. Bei einem hohen Bestand werden sehr viele Samen produziert. Werden diese allerdings auf die Kästchen verteilt, so wird es unwahrscheinlich, dass ein Kästchen nur mit einem Samen besetzt wird. Nur wenige Kästchen werden einzeln besetzt. Es folgt eine kleinere Population in der nächsten Generation. Deren wenige Samen haben wieder eine größere Chance nach der Verteilung einzeln in Kästchen zu landen, was wieder zu einer großen Population führt. Bei sehr hohen Reproduktionsfaktoren sind diese Schwankungen noch extremer. Sobald aber die Anzahl an zu verteilenden Samen einen bestimmten Wert übersteigt, ist es nahezu unmöglich, dass ein Kästchen nur durch einen Samen besetzt wird. Sämtliche Kästchen werden in einer Verteilung mehrfach besetzt, was entsprechend dem Konkurrenzmodell das Aussterben der Population bedeutet.

Die langfristige Beobachtung der Simulationen im Generationstool bestätigt diese Beobachtungen. Die folgenden Grafiken zeigen Beispiele für die oben beschriebenen Fälle mit unterschiedlichen Werten für q und N .³⁸

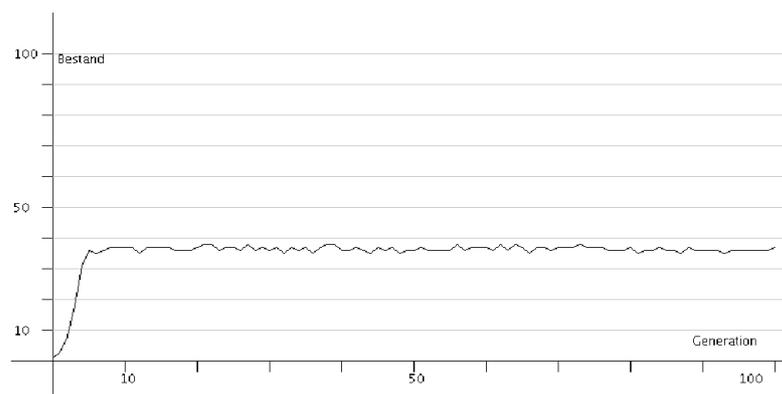


Abbildung 2.13: Schwankung um einen Wert bei $q = 3$ und $N=100$

³⁸Sämtliche Simulationsergebnisse in diesem Kapitel sind Mittelwerte von 50 parallel durchgeführten Simulationen. vgl. Abschnitt 2.4.1

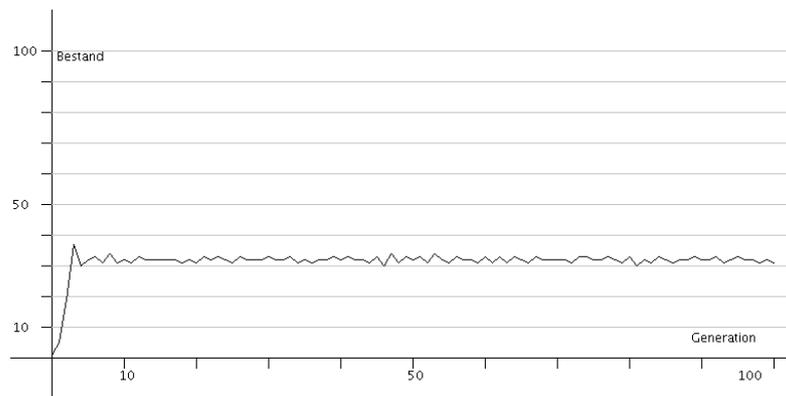


Abbildung 2.14: Schwankung um einen Wert bei $q = 5$ und $N=100$

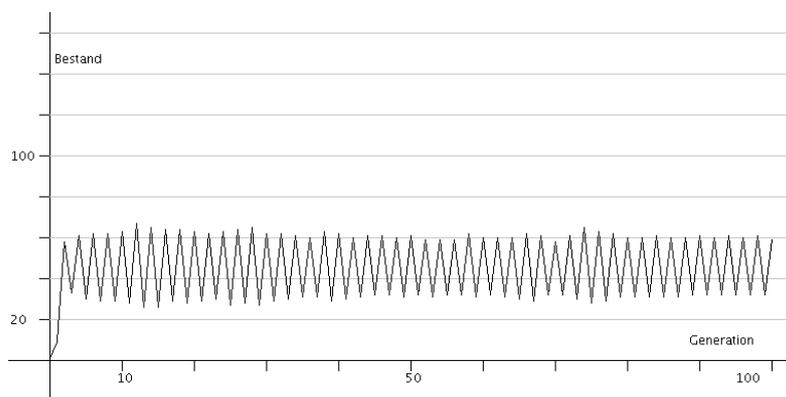


Abbildung 2.15: Zyklus mit $q = 10$ und $N=200$

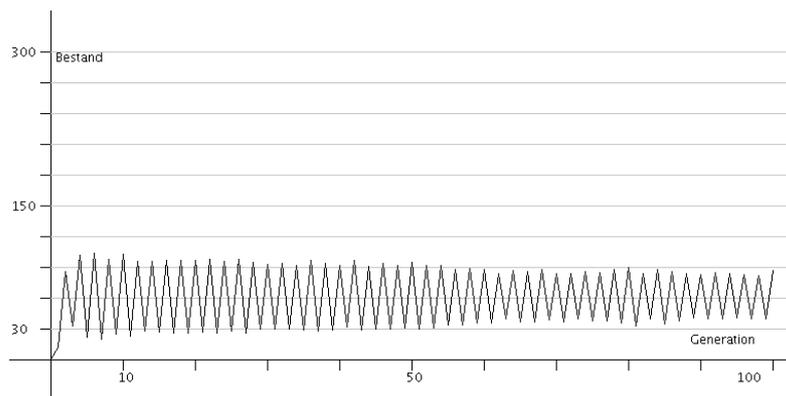
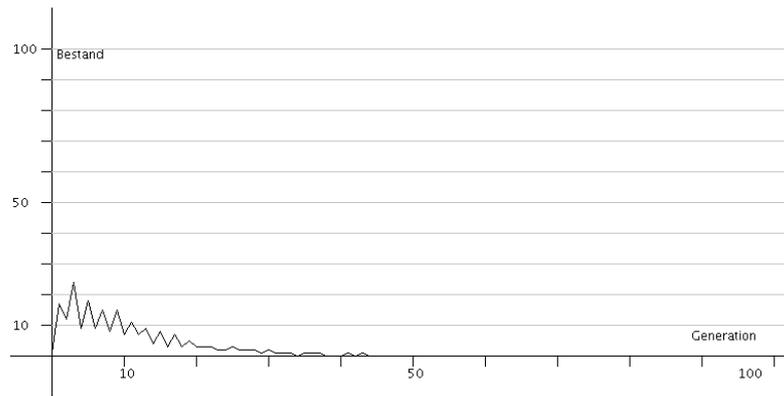
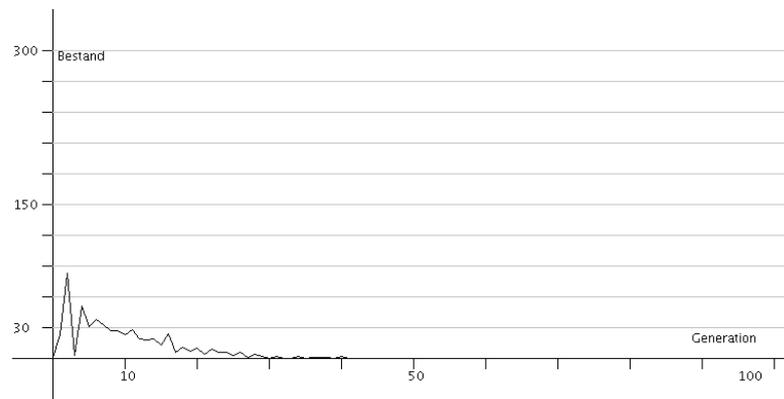
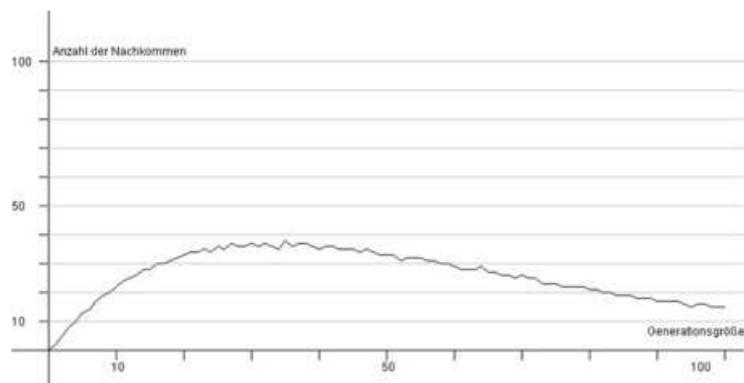


Abbildung 2.16: Zyklus mit $q = 12$ und $N=300$

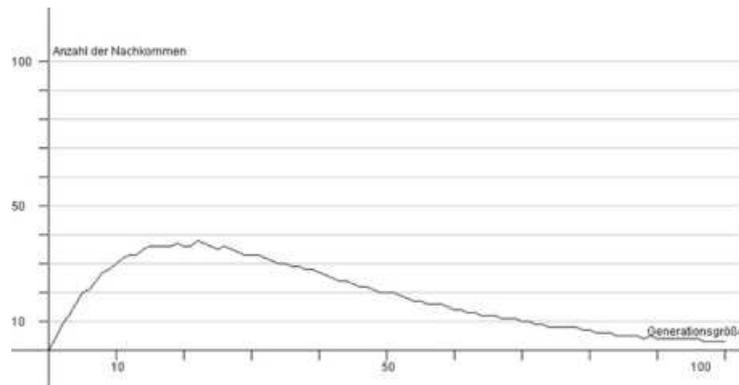
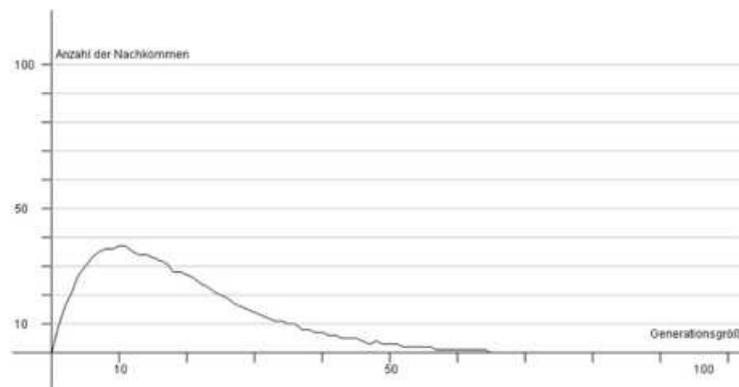
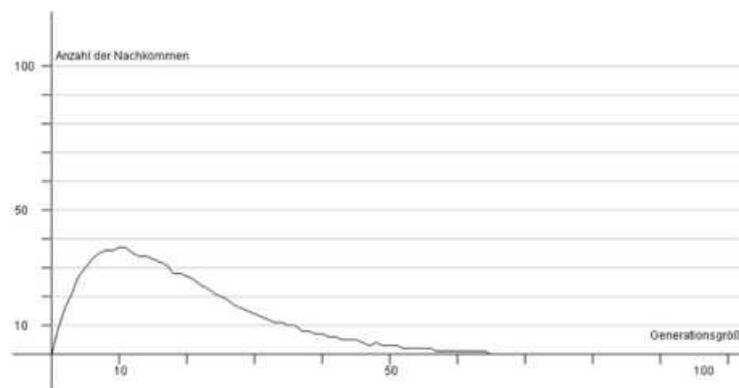
Abbildung 2.17: Aussterben mit $q = 20$ und $N=100$ Abbildung 2.18: Aussterben mit $q = 25$ und $N=300$

Anhand der Grafiken ist zu vermuten, dass die Kurvenverläufe nicht durch eine elementare Funktion angenähert werden können. Insbesondere lassen die Ergebnisse mit zyklischem Verlauf vermuten, dass der Bestand eher über die Reproduktion der jeweils aktuellen Generation beschrieben werden kann. Dies führt schließlich zum Reproduktionstool.

In diesem Tool wird dargestellt, wie sich die Populationsgröße bei vorgegebenen Werten für q und N auf die Reproduktion auswirkt.³⁹ Die folgenden Grafiken zeigen Ergebnisse bei verschiedenen Werten für q und festem N .

Abbildung 2.19: Reproduktion mit $q = 3$ und $N = 100$

³⁹Es handelt sich bei den dargestellten Werten um Mittelwerte aus mehreren Simulationen.

Abbildung 2.20: Reproduktion mit $q = 5$ und $N = 100$ Abbildung 2.21: Reproduktion mit $q = 10$ und $N = 100$ Abbildung 2.22: Reproduktion mit $q = 15$ und $N = 100$

Zunächst lässt sich feststellen, dass alle Grafiken dergestalt sind, dass es möglich erscheint, diese Kurven, die durch Interpolation diskreter Daten entstanden sind, mit Hilfe einer geschlossenen Funktion zu approximieren. Versierten Mathematikern wird hier bereits auffallen, dass es sich um eine Funktion des Typs $f(x) = x \cdot e^{-x}$ handeln könnte. Bevor jedoch die Herleitung dargestellt wird, sind weitere Beobachtungen fest zu halten. Alle Kurven haben ein Maximum, wobei der Wert des Maximums bei konstantem N sich nicht ändert. Mit steigendem q wandert die Position des Maximums allerdings immer mehr in

Richtung Abszisse. Das lässt die Vermutung zu, dass die Position des Maximums von q abhängig ist. Hält man dagegen den Wert von q fest, so kann beobachtet werden, dass der Wert des Maximums mit steigendem N steigt. Die folgenden Grafiken zeigen entsprechende Beispiele.

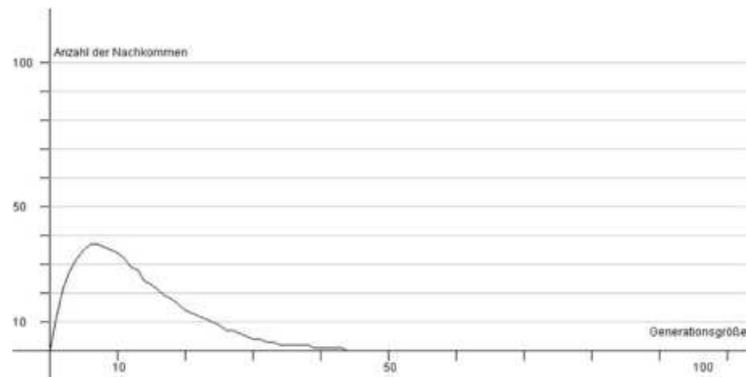


Abbildung 2.23: Reproduktion mit $q = 15$ und $N = 100$

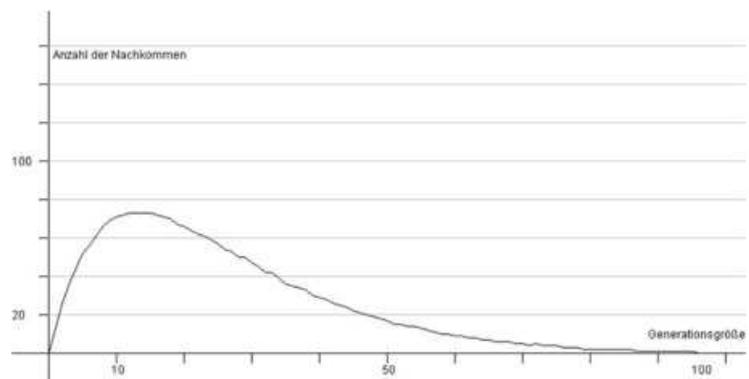


Abbildung 2.24: Reproduktion mit $q = 15$ und $N = 200$

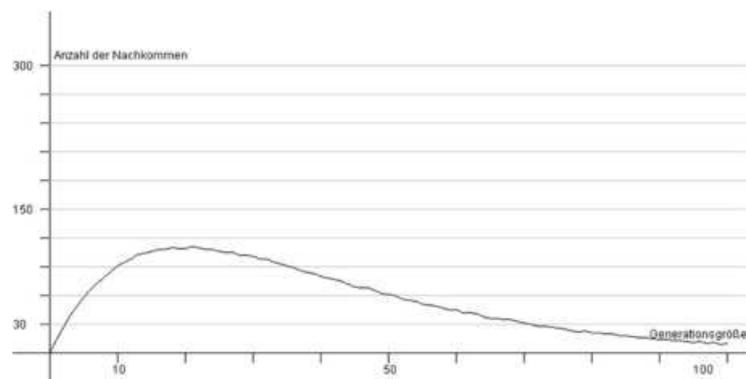
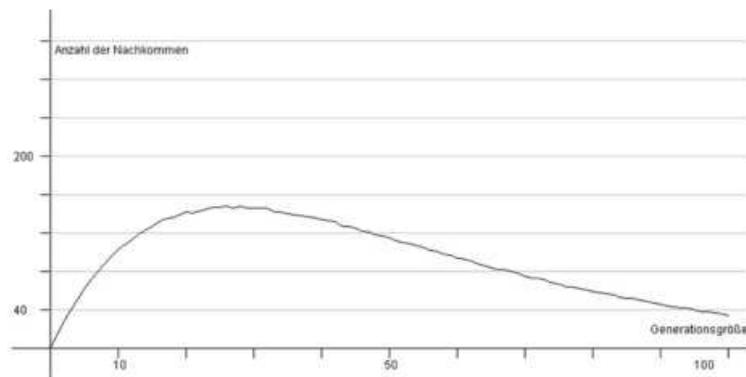


Abbildung 2.25: Reproduktion mit $q = 15$ und $N = 300$

Abbildung 2.26: Reproduktion mit $q = 15$ und $N = 400$

Die Kurven zeigen, dass sich mit steigendem N einerseits der Maximalwert der Reproduktion ändert, andererseits aber auch die Position des Maximums.

Bereits vor einer genaueren Analyse der konkreten Werte können folgende Thesen aufgestellt werden.

- Bei festem N ändert sich die maximale Reproduktion nicht. Das bedeutet, dass die maximale Reproduktion direkt von der Größe des Lebensraumes abhängig ist.
- Mit steigendem N steigt die maximale Reproduktion. Zusätzlich ändert sich die Position des Maximums. Das bedeutet, dass die Position des Maximums von N abhängig ist.
- Mit steigendem q rückt die Position des Reproduktionsmaximums immer näher an die Abszisse. Das bedeutet, dass die Position des Maximums auch von q abhängig ist.

Die folgende Tabelle zeigt die Relation zwischen N und dem Wert der maximalen Reproduktion:

N	Maximum
100	37
200	74
300	111
400	149
500	185
600	223
700	260
800	297
900	333
1000	372

Der Plot dieser Werte zeigt einen linearen Zusammenhang, der durch die Regressionsgrade verdeutlicht wird.

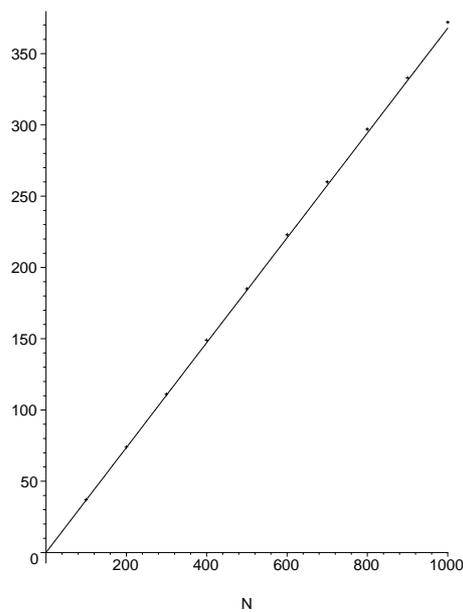


Abbildung 2.27: Relation zwischen der maximalen Reproduktion und N

Die Regressionsgerade hat folgenden Term:

$$MAX(N) \approx 0.37 \cdot N \tag{2.21}$$

$$\approx \frac{N}{e} \tag{2.22}$$

Zur Herleitung des Funktionstyps empfiehlt sich der Export der Daten in eine Tabellenkalkulation. Die folgende Grafik zeigt einen allgemeinen Verlauf der Reproduktionsdaten aus dem Simulationstool.

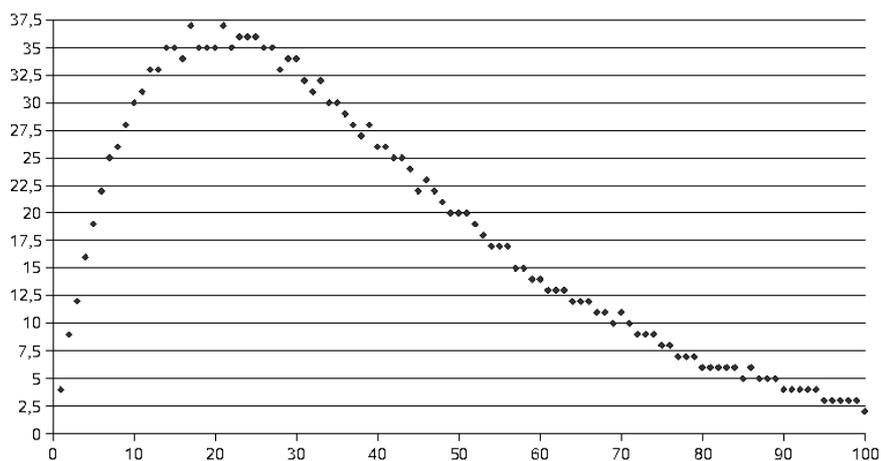


Abbildung 2.28: Allgemeiner Verlauf der Reproduktionskurve bei KM 1 mit $N=100$ und $q=5$

Die spezifische Reproduktion gibt an, wieviele Nachkommen ein einzelnes Individuum in einer Population einer bestimmten Größe mit vorgegebenen Werten für q und N hat. Wird diese betrachtet, so zeigt sich folgendes Bild.

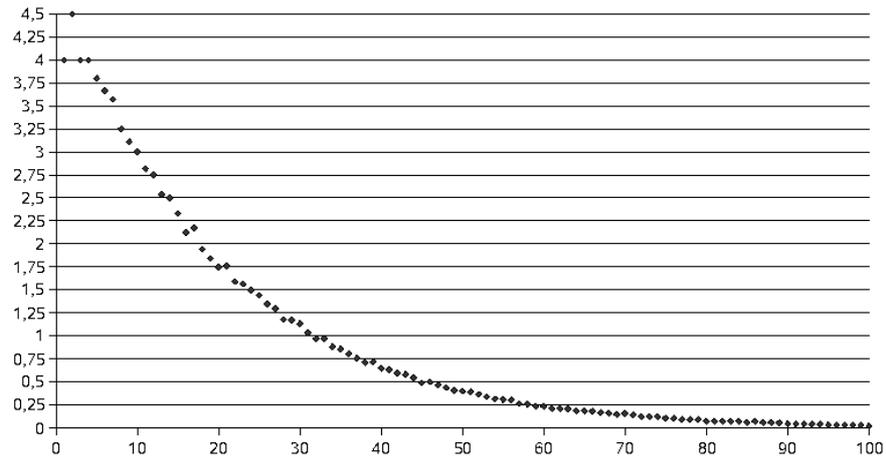


Abbildung 2.29: Spezifische Reproduktion bei KM 1

Der Verlauf der Grafik ist noch nicht ganz eindeutig. Zwei Möglichkeiten sind allerdings denkbar. Der Verlauf könnte sowohl durch eine Hyperbel als auch durch eine Exponentialfunktion angenähert werden. Zunächst wird die erste Variante überprüft, indem die Kehrwerte abgetragen werden. Es zeigt sich folgendes Bild:

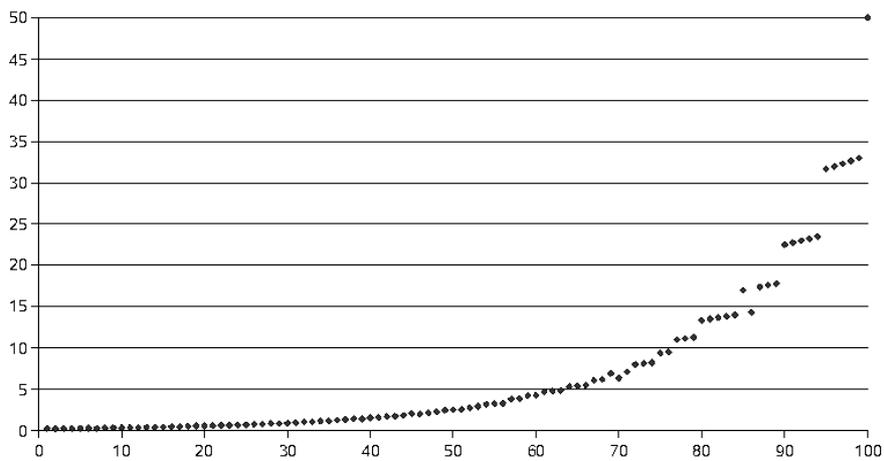


Abbildung 2.30: Reziproke Abtragung der spezifischen Reproduktion bei KM 1

Die resultierende Grafik gibt keine neuen Erkenntnisse. In der zweiten Variante wird die spezifische Reproduktion logarithmisch abgetragen:

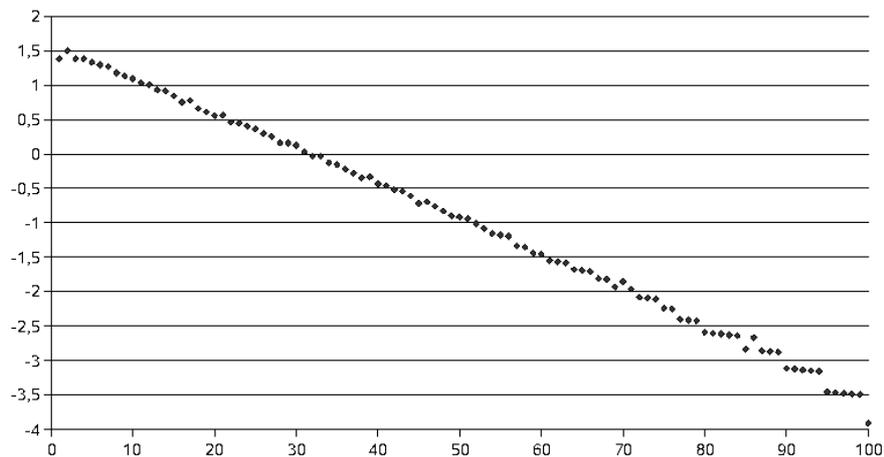


Abbildung 2.31: Logarithmisierte spezifische Reproduktion bei KM 1

Die Gerade bestätigt die zweite Vermutung, so dass an dieser Stelle folgende Funktion angesetzt werden kann.

$$R_{-2}(n) = c_1 \cdot n + c_0; c_1 < 0 \tag{2.23}$$

Die Umkehrung der Linearisierungsschritte führt schließlich zur allgemeinen Reproduktionsfunktion R .

$$R_{-2}(n) = c_1 \cdot n + c_0; c_1 < 0 \quad | \cdot e^0 \tag{2.24}$$

$$R_{-1}(n) = e^{c_0} \cdot e^{c_1 \cdot n} \quad | \cdot n \tag{2.25}$$

$$R(n) = n \cdot e^{c_0} \cdot e^{c_1 \cdot n} =: k \cdot n \cdot e^{c \cdot n}; c < 0 \tag{2.26}$$

Es bleibt zu überprüfen, wie die Parameter q und N in der Reproduktionsfunktion auftreten. Hierzu wird der Anfang der Reproduktionskurve genauer betrachtet. Bei einer Population mit 0 Individuen werden keine Nachkommen produziert, bei einer Population mit einem Individuum wird die Anzahl der Nachkommen bei entsprechend hohem Wert für N und entsprechend kleinem Wert für q nahe bei q liegen. Bei diesen Werten für q und N ist davon auszugehen, dass sämtliche Samen so verteilt werden, dass kein Kästchen mehrfach besetzt ist. Es gilt:

$$R(1) = R(1) - R(0)$$

Weiter gilt laut Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Es gibt ein ξ , $0 < \xi < 1$, mit:

$$R(1) - R(0) = R'(\xi)$$

Die Tangente an den Punkt $(\xi|R(\xi))$ hat nahezu die gleiche Steigung wie die Sekante durch die Punkte $(0|0)$ und $(1|R(1))$. Das bedeutet, dass die Steigung der Reproduktionsfunktion im Punkt $(0|0)$ mit q angenommen werden kann. Es resultiert:

$$R'(n) = (knc + k) \cdot e^{c \cdot n} \tag{2.27}$$

$$R'(0) \approx q \tag{2.28}$$

$$\Leftrightarrow (0 + k) \cdot e^0 \approx q \tag{2.29}$$

$$\Leftrightarrow k \approx q \tag{2.30}$$

Dadurch wird q als linearer Parameter in die Funktion eingebunden.

Im nächsten Schritt wird das Maximum der Reproduktionskurve näher betrachtet. Mit dem notwendigen Kriterium für die Existenz von Extrempunkten folgt, dass die erste Ableitung der Reproduktionsfunktion an der Stelle des Maximums eine Nullstelle haben muss. Wird der lineare Zusammenhang zwischen N und der maximalen Reproduktion dabei berücksichtigt, so folgt:

$$\begin{aligned} R'(n_{max}) &= 0 \\ \Leftrightarrow n_{max} &= -\frac{1}{c} \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\tag{2.32}$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned} R(n_{max}) &= \frac{N}{e} \\ \Leftrightarrow q \cdot -\frac{1}{c} \cdot e^{-\frac{1}{c}} &= \frac{N}{e} \\ \Leftrightarrow -\frac{q}{c \cdot e} &= \frac{N}{e} \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{q}{N} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Die Reproduktionsfunktion für das Konkurrenzmodell 1 lautet somit:

$$R_{(q,N)}(n) = q \cdot n \cdot e^{-\frac{qn}{N}} \tag{2.34}$$

Die Reproduktionsfunktion entspricht der Reproduktionsfunktion im Ricker-Modell, wodurch eine experimentelle Herleitung des Ricker-Modell mit Hilfe des Kästchenmodells gelungen ist.

Daraus ergibt sich das folgende deterministische Modell zur Beschreibung des Bestandes B für Konkurrenzmodell 1:

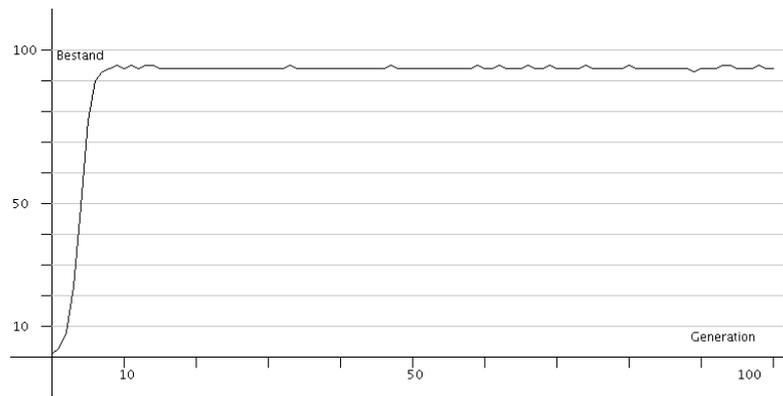
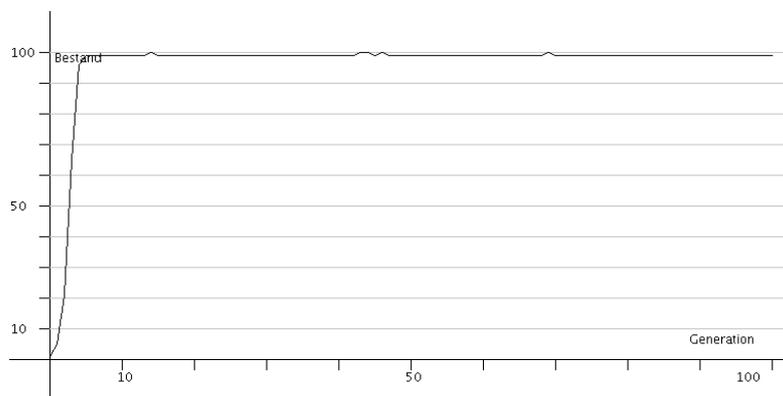
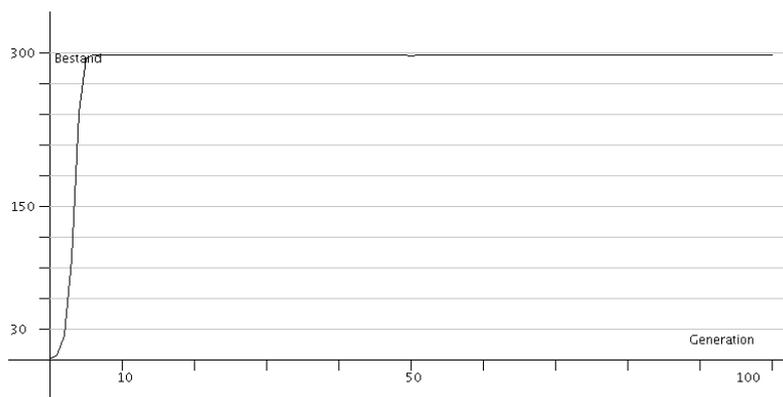
$$B(t+1) = R_{(q,N)}(B(t)) \tag{2.35}$$

Analysen zu Konkurrenzmodell 2

Die Auswertung der Experimente im Basistool zeigen, dass sich der Populationsbestand mit Konkurrenzmodell 2, sofern q eine bestimmte Größe übersteigt, in der Regel bei einem festen Wert einpendelt. Dies ist anschaulich damit zu begründen, dass jedes besetzte Kästchen genau einen reproduktionsfähigen Nachkommen beinhaltet, der wiederum q Samen trägt. Sobald einmal sämtliche Kästchen besetzt wurden, werden im nächsten Schritt $q \cdot 100$ Samen verteilt. Mit steigendem q wird es damit immer unwahrscheinlicher, dass nicht alle Kästchen besetzt werden. Bei kleineren Werten für q pendelt sich der Bestand bei niedrigeren Werten ein.⁴⁰ Natürlich wird bei $q = 1$ der Bestand bei 1 stehen bleiben.

Die Grafiken im Generationstool bestätigen diese Beobachtung, wie die folgenden Beispiele zeigen.

⁴⁰Dieses Phänomen beruht auf einem stochastischen Effekt. Näheres dazu in Abschnitt 2.4.3.

Abbildung 2.32: Bestandsentwicklung bei Konkurrenzmodell 2 mit $q = 3$ und $N = 100$ Abbildung 2.33: Bestandsentwicklung bei Konkurrenzmodell 2 mit $q = 5$ und $N = 100$ Abbildung 2.34: Bestandsentwicklung bei Konkurrenzmodell 2 mit $q = 5$ und $N = 300$

Der Verlauf der Kurven erinnert an eine Sättigungskurve, wobei der Anstieg zu Beginn sehr stark ist. Auch hier macht es Sinn, die Reproduktionskurven zu betrachten.

Das Reproduktionstool zeigt für verschiedene Werte von q und N stets das gleiche Bild. Qualitativ haben alle Reproduktionskurven den gleichen Verlauf. Es fällt jedoch auf, dass die Reproduktion mit steigender Generationsgröße sich immer mehr dem Wert N nähert. Diese Beobachtung entspricht den Ergebnissen aus der Arbeit mit vorangehenden Tools.

Die folgenden Grafiken zeigen eine Auswahl an Reproduktionskurven für verschiedene Werte von q und N .

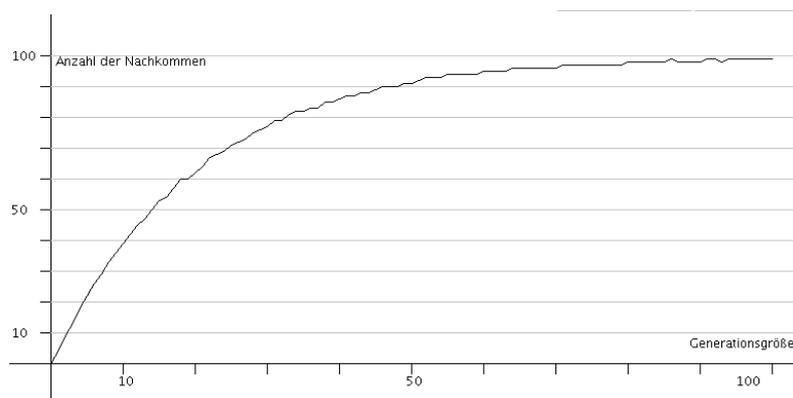


Abbildung 2.35: Reproduktionskurve mit $q = 5$ und $N = 100$

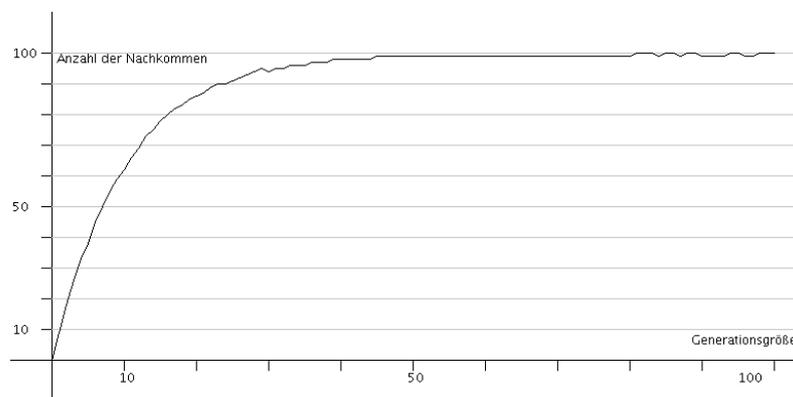


Abbildung 2.36: Reproduktionskurve mit $q = 10$ und $N = 100$

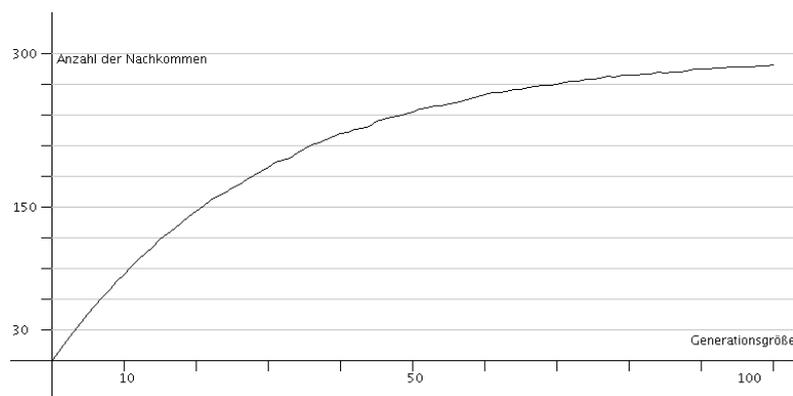
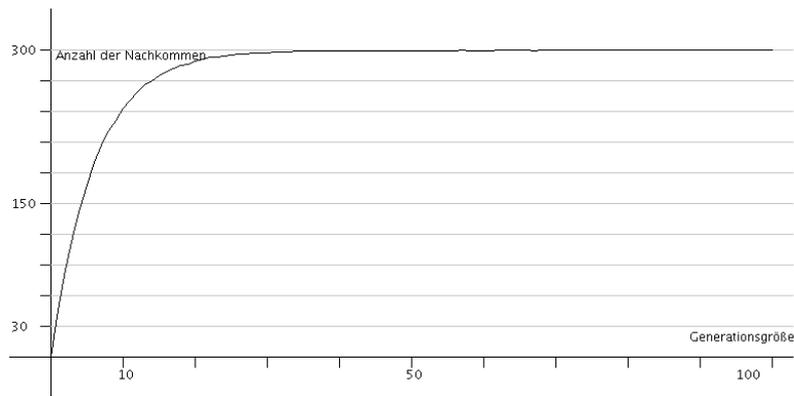
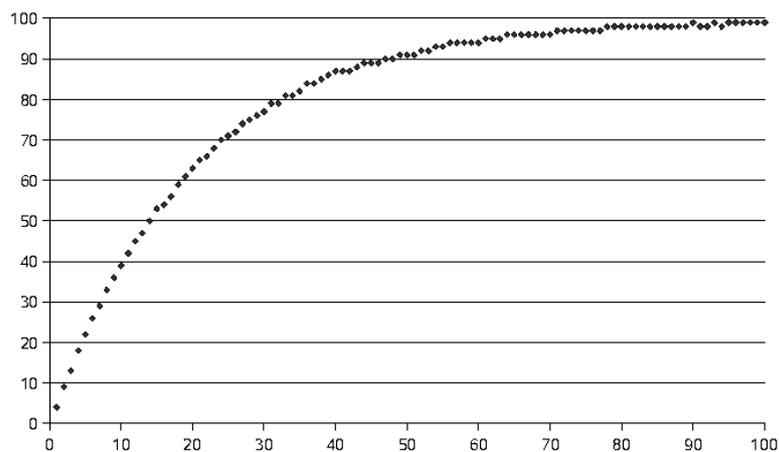


Abbildung 2.37: Reproduktionskurve mit $q = 10$ und $N = 300$

Abbildung 2.38: Reproduktionskurve mit $q = 50$ und $N = 300$

Analog zur Analyse zum Konkurrenzmodell 1 sollten die Werte aus der Simulation in eine Tabellenkalkulation exportiert werden, um dort eine Linearisierung durchführen zu können. In der folgenden Abbildung sind Daten aus dem Simulationstool zur Reproduktion grafisch dargestellt.

Abbildung 2.39: Daten aus dem Simulationstool zur Reproduktion mit $N = 100$ und $q = 5$; Abszisse: Größe der Elterngeneration; Ordinate: mittlere Reproduktion

Die Werte könnten durch eine Funktion der Form $f(x) = \frac{C \cdot x}{K+x}$ angenähert werden. In diesem Fall entspricht C dem Grenzwert der Werte für $x \rightarrow \infty$ und K dem Wert, bei dem die Hälfte des Maximums erreicht wird. Demnach hat C den Wert 100 und K den Wert 9, da bei einer Generationsgröße von 9 die Reproduktion etwa bei 50 liegt. Die folgende Grafik zeigt den Vergleich zwischen Simulationen und den Funktionswerten der Funktion $f(x) = \frac{100 \cdot x}{9+x}$.

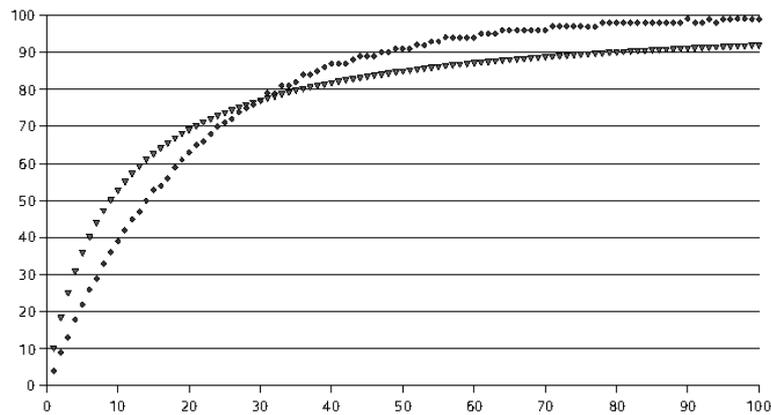


Abbildung 2.40: Vergleich von Simulations- (Raute) und Funktionswerten (Dreieck)

Zwar ist eine gewisse Annäherung zu erkennen, dennoch soll weiter untersucht werden, ob die Werte nicht durch eine andere Funktion besser angenähert werden können. Die Herleitung einer solchen Funktion soll dabei über eine Transformation der Daten erreicht werden.

Wie bereits an den verschiedenen Beispielen zu erkennen war, ähnelt der Verlauf der Reproduktion auch dem Graphen einer Funktion der Form $f(x) = K - K \cdot e^{-x}$, wobei die sogenannte Sättigung bei $K = N$ eintritt. Es ist daher sinnvoll die Differenz aus N und der Reproduktion zu betrachten. Die folgende Grafik zeigt den Verlauf der Werte, wenn die Reproduktionswerte von N abgezogen wurden.

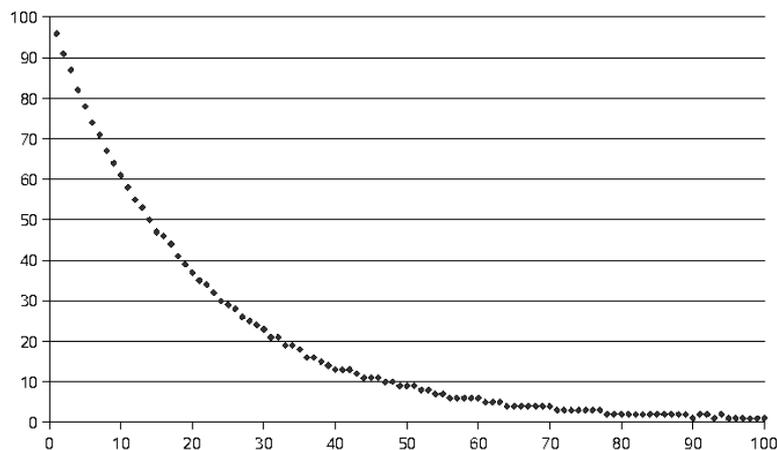


Abbildung 2.41: Differenz: N -Reproduktion

Für die Annäherung dieser Werte durch eine Funktion gibt es unter anderem zwei Möglichkeiten. Einerseits könnten die Werte etwa durch eine Funktion der Form $f(x) = \frac{1}{x^2+c}$ andererseits aber auch durch eine Exponentialfunktion angenähert werden. Die erste Variante wird dadurch überprüft, dass vom Kehrwert der Werte die Quadratwurzel gezogen wird und diese dann abgetragen werden. Die resultierende Grafik (vgl. Abb. 2.42) liefert keine weiteren Erkenntnisse, da eine Linearisierung noch nicht erreicht wurde.

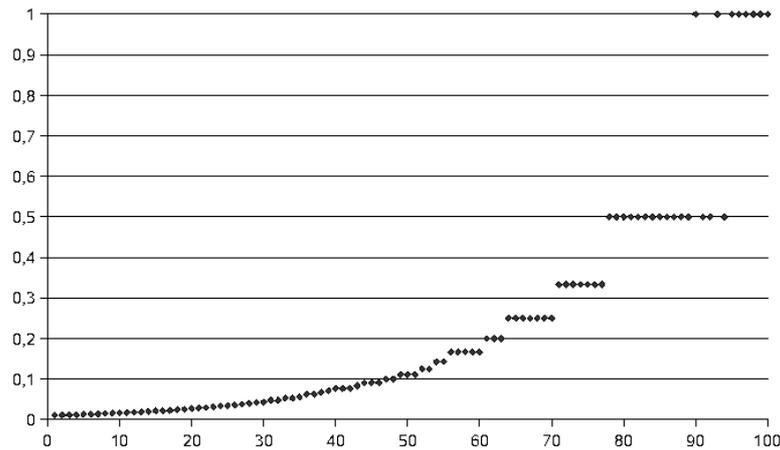


Abbildung 2.42: Überprüfung der ersten Variante

Die logarithmische Abtragung der Werte aus Abbildung 2.41 zeigt dagegen einen Verlauf, der zumindest für nicht zu große Elterngenerationen linear ist.

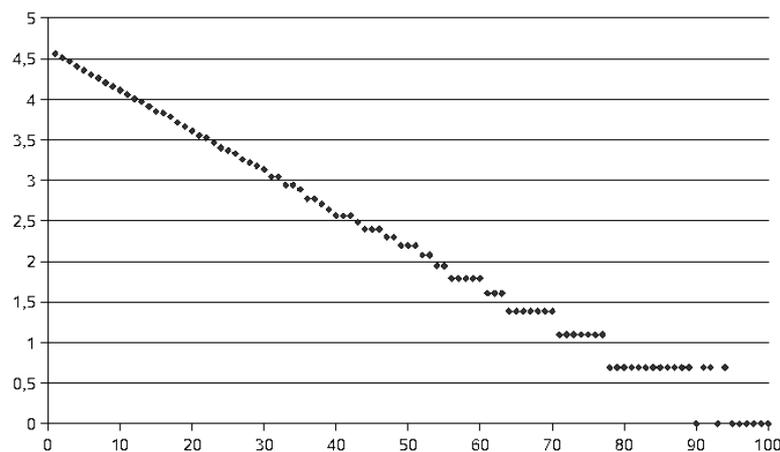


Abbildung 2.43: Logarithmierte Werte der vorher dargestellten Differenz

Die Tatsache, dass die Werte ab einer bestimmten Stelle auf der Abszisse liegen und nicht weiter in den 4. Quadranten laufen liegt an den Simulationsergebnissen. Die Ergebnisse aus der Simulation erreichen nicht den exakten Wert 100 sondern nur 99. Die Differenz bleibt demnach bei 1. Dieses Phänomen basiert auf der Diskretisierung des Vorgangs und auf stochastischen Effekten. Für nicht zu große Elterngenerationen ist das Ergebnis allerdings zufrieden stellend.

Demnach ist an dieser Stelle wieder von einer linearen Funktion auszugehen:

$$R_{-2}(n) = c_0 \cdot n + c_1; c_0 < 0 \tag{2.36}$$

Die Umkehrung der Linearisierungsschritte liefert schließlich:

$$R_{-2}(n) = c_0 \cdot n + c_1 \quad \text{mit} \quad c_0 < 0 \tag{2.37}$$

$$R_{-1}(n) = e^{c_0 \cdot n} \cdot e^{c_1} = N - R(n) \tag{2.38}$$

$$R(n) = N - e^{c_1} \cdot e^{c_0 \cdot n} =: N - k \cdot e^{c \cdot n}; c < 0 \tag{2.39}$$

Da $k = N$ gilt, bleibt nun die Rolle des Modellparameters q zu untersuchen. Analog wird der Anfang der Reproduktionsfunktion näher betrachtet. Auch hier kann festgehalten werden, dass gelten muss:

$$R(0) = 0 \tag{2.40}$$

$$R(1) \approx q \tag{2.41}$$

$$\Rightarrow R'(0) \approx q \tag{2.42}$$

Mit der Ableitung der allgemein bestimmten Reproduktionsfunktion folgt:

$$R'(n) = -Nc \cdot e^{cn} \tag{2.43}$$

$$R'(0) = q \tag{2.44}$$

$$\Leftrightarrow -Nc \cdot e^{c \cdot 0} = q \tag{2.45}$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{q}{N} \tag{2.46}$$

Die Reproduktionsfunktion für das Konkurrenzmodell lautet somit:

$$R_{(q,N)}(n) = N - N \cdot e^{-\frac{qn}{N}} \tag{2.47}$$

Daraus ergibt sich das folgende deterministische Modell zur Beschreibung des Bestandes B für Konkurrenzmodell 2:

$$B(t+1) = R_{(q,N)}(B(t)) \tag{2.48}$$

2.4.3 Stochastische Effekte

Schon während der Analyse der Simulationsergebnisse, aber auch bei dem Vergleich der Modellergebnisse mit entsprechenden Simulationsergebnissen ist zu beobachten, dass sich interessante Unterschiede ergeben.

Beispielsweise erreichen die Simulationen zum Konkurrenzmodell 2 bei kleineren Werten für q nicht immer die maximale Anzahl an Pflanzen. Eigentlich müsste bei Werten für $q > 1$ nach entsprechend langer Zeit stets der Wert N angenommen werden. Dies ist aber nicht der Fall.

Der Vergleich zwischen dem resultierenden deterministischen Modell zu Konkurrenzmodell 1 und den Simulationen zeigt bei kleinen Werten für q ähnliche Ergebnisse. Bei großen Werten für q hingegen werden immer größere Unterschiede offensichtlich. Die Abbildungen 2.44 bis 2.46 machen dies deutlich.

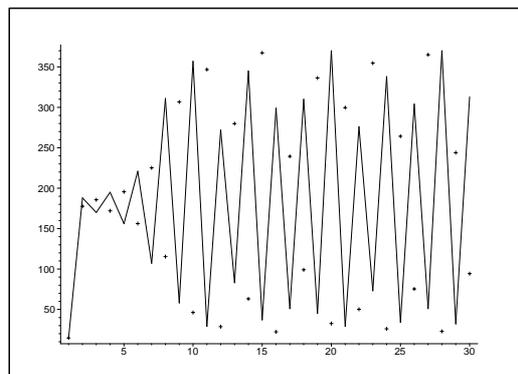


Abbildung 2.44: Vergleich zwischen Simulation und Modell für KM 1 mit $N=1000$, $q=15$; Abszisse: Generation, Ordinate: Populationsgröße

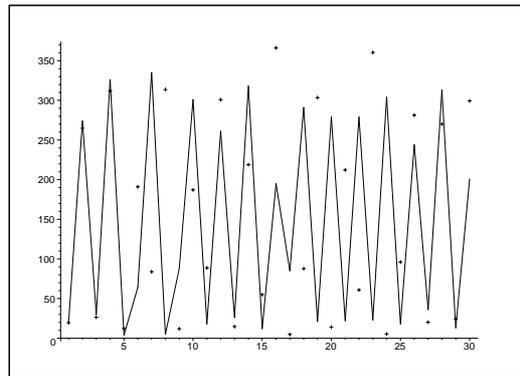


Abbildung 2.45: Vergleich zwischen Simulation und Modell für KM 1 mit $N=1000$, $q=20$; Achsen wie in Abb. 2.44

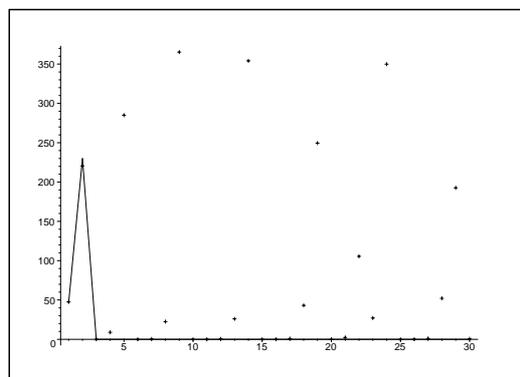


Abbildung 2.46: Vergleich zwischen Simulation und Modell für KM 1 mit $N=1000$, $q=50$; Achsen wie in Abb. 2.44

Der Grund für diese Abweichungen liegt an der Beschränkung auf Mittelwerte bei der Analyse ohne die Beachtung der Varianzen. Die Ergebnisse aus den Tools zur Reproduktion sind Mittelwerte aus mehreren Simulationen, wobei die Varianz bei der Analyse nicht beachtet wurde. Bei großen Werten für q ist die Varianz für das Konkurrenzmodell 1 beispielsweise sehr groß. Die folgenden Bilder zeigen die relativen Varianzen zu unterschiedlichen Werten von q .

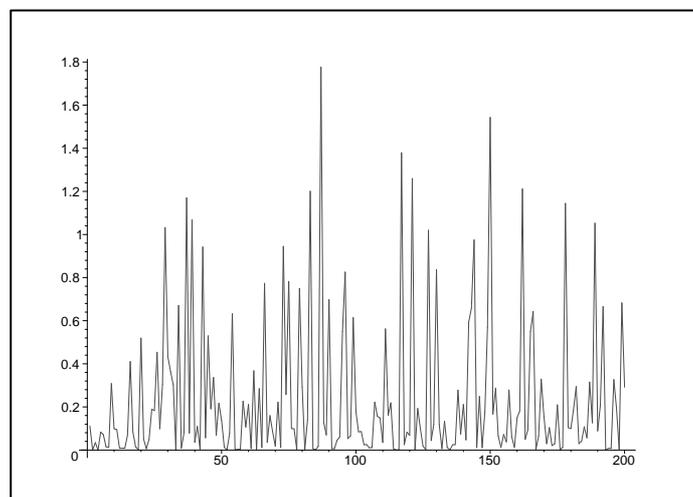
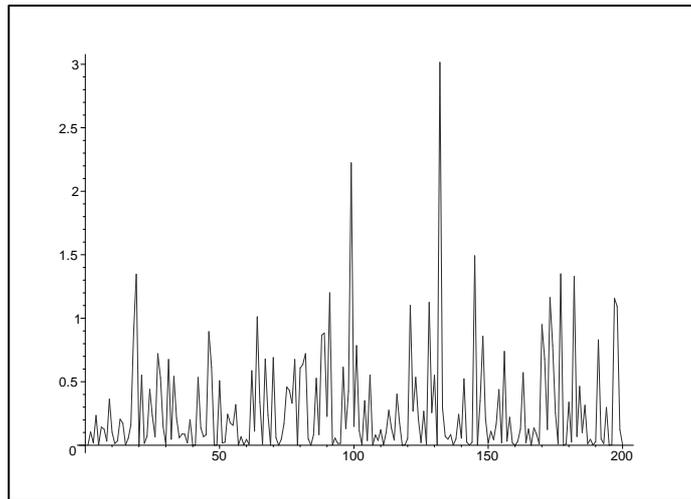
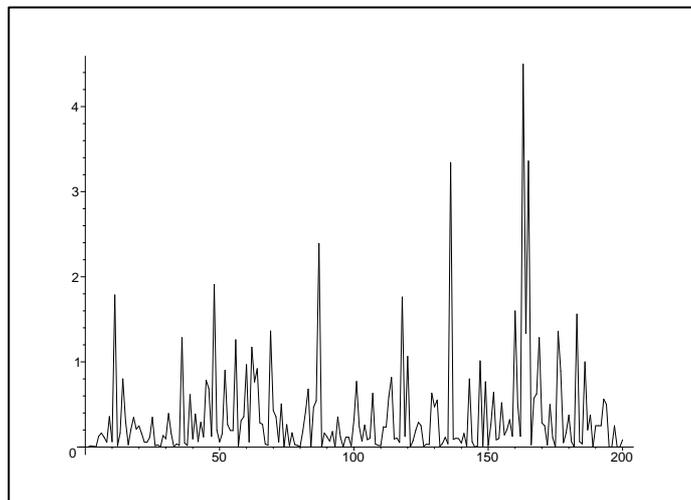


Abbildung 2.47: Relative Varianzen für $q = 10$

Abbildung 2.48: Relative Varianzen für $q = 20$ Abbildung 2.49: Relative Varianzen für $q = 40$

Es ist zu erkennen, dass die Varianzen im ersten Bild noch deutlich unter 2 bleiben. Für $q = 20$ und $q = 40$ liegen die Varianzen an unregelmäßigen Stellen weit über 2. Vor diesem Hintergrund bleibt die Frage, ob die Mittelwertbildung sinnvoll ist. Dies hat zur Folge, dass die Qualität des deterministischen Modells generell in Frage gestellt werden kann. Die hergeleitete Replikationsfunktion war für die untersuchten Simulationen der Replikation passend, weshalb eine generelle Ablehnung des Modells nicht unbedingt erfolgen muss. Immerhin ist fest zu halten, dass das Modell für kleine Werte von q durchaus gute Ergebnisse liefert. Dennoch ist eine gewisse Vorsicht angebracht, da die Bildung von Mittelwerten in Extremfällen, hier bei hohen Werten von q , zu Problemen führen kann.

2.4.4 Unterrichtsliche Umsetzung

Nachdem die Analyse der Simulationsergebnisse zwei Modelle ergeben hat, soll in diesem Abschnitt dargestellt werden, wie die Simulationstools und die Analyse der Ergebnisse im Mathematikunterricht eingebunden werden können.

Schulische Vorgaben und Motivation

Im Folgenden werden Ansätze dargestellt, in welcher Form die Simulationstools im Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Eine Basis dieser Ansätze sind die neuen Kernlehrpläne für das Fach Mathematik des Landes Nordrhein-Westfalen, die im Schuljahr 2005/2006 für alle Schulformen eingeführt wurden. Bereits im ersten Kapitel wurde die Bedeutung der mathematischen Modellierung als eines der Kerngeschäfte angewandter Mathematiker einerseits, aber auch die Notwendigkeit der Vermittlung mathematischer Modellierung in der Ausbildung in allen Altersstufen andererseits dargelegt. Mit den Kernlehrplänen werden erstmalig prozessbezogene Kompetenzen auf die gleiche Ebene wie inhaltsbezogene Kompetenzen gehoben, wie die folgende Tabelle zeigt.⁴¹

fachbezogene Kompetenzen					
prozessbezogene Kompetenzen			inhaltsbezogene Kompetenzen		
	Argumentieren/ Kommunizieren	kommunizieren, präsentieren und argumentieren		Arithmetik/ Algebra	mit Zahlen und Symbolen umgehen
	Problemlösen	Probleme erfassen, erkunden und lösen		Funktionen	Beziehungen und Veränderung beschreiben und erkunden
	Modellieren	Modelle erstellen und nutzen		Geometrie	ebene und räumliche Strukturen nach Maß und Form erfassen
	Werkzeuge	Medien und Werkzeuge verwenden		Stochastik	mit Daten und Zufall arbeiten

Abbildung 2.50: Fachbezogene Kompetenzen laut Kernlehrpläne NRW ab 2005/2006

Der Aspekt der Modellierung erfährt hierbei eine ausgesprochen hohe Wertigkeit im Rahmen der Fähigkeiten bzw. Kompetenzen, die in der Schule im Fach Mathematik vermittelt werden sollen. Dieser höheren Wertigkeit soll mit den folgenden Überlegungen entsprochen werden. Dabei liegen in der Sekundarstufe I die Schwerpunkte einerseits auf dem Versuch, ein vorgegebenes Modell mit einer realen Situation zu vergleichen. Andererseits soll das Modell auf elementarer Ebene angewendet und der grundlegende Mechanismus verstanden werden. Tiefer gehende Analysen und Mathematisierungen treten zugunsten qualitativer Feststellungen in den Hintergrund.

Die Ansätze für die Sekundarstufe II basieren mit auf den Ausführungen der Richtlinien des Landes NRW für das Fach Mathematik an Gymnasien und Gesamtschulen.⁴² In den Richtlinien werden sieben „zentrale Ideen als Kern der diadaktischen Konzeption“ vorgestellt.⁴³

⁴¹Kernlehrpläne SI [24] S. 12

⁴²Richtlinien SII [23]

⁴³Richtlinien SII [23] S. 6ff

- Idee der Zahl
- Idee des Messens
- Idee des räumlichen Strukturierens
- Idee des funktionalen Zusammenhangs
- Idee der Wahrscheinlichkeit
- Idee des Algorithmus
- Idee des mathematischen Modellierens

Diese Ideen stellen ein Gerüst dar, an dem sich die mathematischen Gegenstände der gymnasialen Oberstufe orientieren sollen. Dieses Gerüst wird gleichzeitig benutzt, um einerseits diese Gegenstände mit den Themen der Sekundarstufe I zu verbinden und andererseits die Verknüpfung zwischen mathematischer und außermathematischer Kultur zu verdeutlichen.⁴⁴ Konkret wird zu der Bedeutung des mathematischen Modellierens in der Schule folgende Feststellung getroffen:⁴⁵

„Um den Zugang zur Idee des mathematischen Modellierens zu gewinnen, ist es notwendig, dass man mathematische Modelle kennen lernt, entwickelt und verwendet. Dabei findet Modellbildung gleichermaßen bei elementaren und komplexen Situationen statt: Bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Laplace-Würfel ebenso wie bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen durch Exponentialfunktionen.
[...]

Vor allem werden in diesem Zusammenhang auch die Grenzen der entwickelten oder (nur) angewandten Modelle reflektiert. Bei komplexeren Problemen, insbesondere in fachübergreifenden Kontexten, wird bewusst, wie die Auswahl und unterschiedliche Berücksichtigung von Bedingungen zu verschiedenartigen Modellen führen kann, in denen jeweils andere oder zusätzliche Aspekte des Sachverhalts zum Tragen kommen. Daher sollte sich die Erarbeitung von Modellen im Unterricht nicht von vornherein an vorgegebenen Lösungen orientieren.“

Aufgrund der hier ausgeführten Vorgaben zur Umsetzung des Modellierens im Mathematikunterricht erscheint eine Behandlung von deterministischen Modellen zur Beschreibung von Populationen sinnvoll. Mit Hilfe der Simulationstools ist in der Sekundarstufe II eine Herleitung eines solchen Modells unter Benutzung der gängigen Techniken aus dem Bereich der Funktionendiskussion auf experimenteller Ebene möglich. Die hierbei notwendigen Techniken, wie beispielsweise das Bilden von Ableitungen sowie das Finden von Extremstellen, werden benutzt, um experimentell erstellte Daten aus den Simulationstools dahingehend auszuwerten, dass eine mathematische Beschreibung entworfen werden kann.

Das übergeordnete Ziel in beiden Sekundarstufen ist, den Vorgang beim Modellieren einer realen Situation, eines realen Systems, in der Schule zu verankern und in unterschiedlichen Altersstufen nach dem Spiralprinzip zu präsentieren, zu erläutern und erste Schritte zur eigenständigen Modellierung zu ermöglichen.

⁴⁴Richtlinien SII [23] S. 6

⁴⁵Richtlinien SII [23] S. 11

Modellierung in der Sekundarstufe I

Die Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 8 werden im Bereich der Modellierung in den Kernlehrplänen folgendermaßen angegeben.⁴⁶

Modellieren – Modelle erstellen und nutzen	
	Schülerinnen und Schüler
Mathematisieren	<ul style="list-style-type: none"> • übersetzen einfache Realsituationen in mathematische Modelle (Zuordnungen, lineare Funktionen, Gleichungen, Zufallsversuche)
Validieren	<ul style="list-style-type: none"> • überprüfen die im mathematischen Modell gewonnenen Lösungen an der Realsituation und verändern ggf. das Modell
Realisieren	<ul style="list-style-type: none"> • ordnen einem mathematischen Modell (Tabelle, Graf, Gleichung) eine passende Realsituation zu

Abbildung 2.51: Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 8

Die Übersetzung der Realsituation einer unter Konkurrenz stehenden Population in das oben beschriebene Kästchenmodell ist sicherlich für Schüler der Jahrgangsstufen 7 und 8 zu komplex. Da man aber in diesen Klassen einfache Modelle mit den Schülern entwirft und diese auch dazu anleitet, einfache Modelle selbst zu erstellen, ist die Grundidee der Vereinfachung von realen Situationen bereits bei den Schülern angelegt. Das Kästchenmodell ließe sich gewissermaßen im Rahmen einer Erweiterung der bisher kennen gelernten Modelle behandeln. Ausgangspunkt sollte dabei die Darstellung der realen Situation sein. Hierbei würde sich aufgrund des einfacheren Zugangs eine Population von Blumen in einem größeren Setzkasten bestehend aus mehreren kleinen Blumentöpfen gut eignen. Tierpopulationen haben in diesem Zusammenhang den Nachteil, dass die Unterscheidung von Nachkommen vor und nach der Geschlechtsreife Schülern dieses Alters bei der Modellierung größere Schwierigkeiten bereiten würde. Die Vorstellung von Blumensamen und vollständig ausgebildeten Blumen ist sicherlich näher an der Lebenswelt der Schüler. Die Umsetzung der Lebensraumgröße durch die Anzahl der Kästchen und dem Reproduktionsfaktor durch die Anzahl der Samen, die in einer Blumen entwickelt werden können, erscheinen unproblematisch und sollten von den Schülern, wenn nicht selbst entwickelt, so doch zumindest als plausibel erkannt werden können. Die Entwicklung der zwei Konkurrenzmodelle erscheint allerdings komplizierter und müsste durch den Lehrer vorgegeben werden. Dies sollte mit entsprechenden realen Beispielen untermauert werden.⁴⁷

Der Ablauf des Modells in mehreren Schritten sollte dann mit den Schülern zunächst erarbeitet und anschließend verbalisiert und aufgeschrieben werden. Die Darstellung kann dabei in Form eines Diagramms, aber auch als Tabelle oder strukturierte Beschreibung erfolgen. In einer arbeitsteiligen Gruppenarbeit könnten dabei verschiedene Methoden erprobt und anschließend verglichen werden.

Die Durchführung der Simulationen mit Hilfe des Modells kann in einem ersten Schritt spielerisch ohne Computer realisiert werden. Hierzu sollten die Schüler Spielfelder erhalten oder erstellen, auf denen 36 Felder in einem Quadrat angeordnet sind. Die einzelnen Felder sind durch Koordinaten zwischen 1 und 6 genau bestimmt.

⁴⁶Kernlehrpläne SI [24] S. 23

⁴⁷vgl. Abschnitt 2.1

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Abbildung 2.52: Spielfeld zum Kästchenmodell mit 36 Kästchen

Mit Hilfe zweier unterschiedlich gefärbter oder anders unterscheidbare Spielwürfel kann eine vorgegebene Menge von Samenkörnern, z. B. Sesamsamen oder Sonnenblumenkerne, auf die Kästchen zufällig verteilt werden. Dazu werden zunächst für die ersten n_0 Samen jeweils beide Würfel geworfen. Jeder Würfel gibt dabei eine Koordinate des Kästchens an, in das der jeweilige Samen gelegt wird. Nachdem die ersten Samen so zufällig verteilt wurden, wird entsprechend dem zugrunde gelegten Konkurrenzmodell untersucht, in welchen Kästchen eine reproduktionsfähige Pflanze entsteht. Diese Anzahl wird mit dem festgesetzten Reproduktionsfaktor q multipliziert. Diese Zahl gibt an, wieviele Samen in der nächsten Runde mit Hilfe der Würfel verteilt werden müssen. Bevor diese neue Runde gestartet wird, werden alle bis dahin verteilten Samen vom Spielfeld genommen. Es ist empfehlenswert mit wenigen Samen zu starten und den Reproduktionsfaktor ebenfalls klein (z. B. 2 oder 3) zu halten.

So können erste Erfahrungen mit dem Modell gesammelt werden, wobei der haptische Aspekt die Verbindung zwischen der realen Situation des Aussäens im Setzkasten und dem Modell verdeutlicht.

Nachdem die Schüler den Mechanismus des Modells verinnerlicht haben, kann in einer weiteren Phase mit dem Basismodell gearbeitet werden. Die Arbeit mit dem Modell beschränkt sich auf das Experimentieren, Beobachten und Beschreiben. Nicht die Analyse steht im Vordergrund, sondern das Verstehen des Modells. Es ist vorstellbar, dass qualitative Aussagen durch Experimente untersucht und bestätigt oder verworfen werden können. Dazu könnten beispielsweise folgende Aussagen gehören:

- Bei Konkurrenzmodell 2 ist es egal, wie groß q ist. Solange mindestens $q = 2$ ist, erhält man irgendwann immer 100 Nachkommen.
- Je größer q ist, desto eher sind bei Konkurrenzmodell 2 alle Kästchen mit Nachkommen besetzt.
- Je weniger Samen auf das Feld verteilt werden, um so größer ist die Chance, dass alle Samen alleine in ein Kästchen fallen.
- Wählt man q sehr groß, so stirbt die Population bei Konkurrenzmodell 1 irgendwann aus.
- Bei manchen Werten für q kommt es bei Konkurrenzmodell 1 vor, dass die Anzahl der Nachkommen nach einer gewissen Zeit nahe bei einer bestimmten Zahl liegt.

Einige der Aussagen sind von Schülern der Klassen 7 und 8 durchaus selber mit dem Tool zu entwickeln, wobei die Richtung eventuell etwas vorgegeben werden muss. Andere

Aussagen sind hingegen zu komplex. Hier bietet es sich an, diese als Forschungsaufträge zusammen mit falschen Vermutungen überprüfen zu lassen.

Das Kennen lernen des Modells, die Arbeit mit dem Modell und die Verinnerlichung des Mechanismus auf unterschiedlichen Ebenen ermöglichen es den Schülern, ein komplexeres Modell zu erfahren und den Umgang damit zu üben. Die Entwicklung und/oder Verifizierung qualitativer Aussagen helfen, das Modell intensiver zu begreifen und die Zusammenhänge im Modell zu verstehen. Auch wenn diese erste Auseinandersetzung mit dem Modell nur sehr wenig mit den üblichen Techniken und Vorgehensweisen im Mathematikunterricht gemein hat, so wird hier der Umgang mit einem Modell in allen Phasen auf ansprechende Weise und auf adäquatem Niveau den Schülern nahegebracht.

Modellierung in der Sekundarstufe II

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass das Kästchenmodell bereits in der Klasse 7 oder 8 von den Schülern behandelt wurde. Sollte dies nicht der Fall sein, so sollte eine Einführungsphase vorgeschaltet werden. Prinzipiell kann diese Einführungsphase analog zur bereits für die Sekundarstufe I dargestellten Vorgehensweise ablaufen. Es empfiehlt sich allerdings, die biologischen Grundlagen in Form eines Schülerreferates einzuführen.

Die unterrichtlichen Voraussetzungen für die Entwicklung eines Modells auf Basis der in den Simulationstools ermittelten Werte sind:

- Der Begriff der Ableitung
- Der Begriff der Umkehrfunktion
- Bestimmung von Extremstellen mittels notwendigem und hinreichendem Kriterium
- Ableitungsregeln
- Exponentialfunktionen

Nachdem den Schülern das Kästchenmodell als Basismodell mit Hilfe des Basistools vorgestellt und anhand einiger Fragestellungen erste Erfahrungen mit dem Modell gemacht wurden, ist für weitergehende Untersuchungen eine langfristige Simulation unabdingbar. Das zweite Tool liefert für beide Konkurrenzmodelle Grafiken, aus denen die langfristige Entwicklung der Population mit unterschiedlichen Werten für die Parameter erkennbar ist. Diese Grafiken sind für das Konkurrenzmodell 2 bereits in der Form, dass die Grafiken durch stetige Funktionen angenähert werden könnten. Obwohl hier eine Sättigungsfunktion erkennbar ist, soll dennoch mit dem letzten Tool weitergearbeitet werden, in dem die Reproduktion der Population in Abhängigkeit ihrer Größe simuliert wird. Bei den Plots zum Konkurrenzmodell 1 werden für kleine Reproduktionsfaktoren Grafen gezeigt, die auf einen Grenzwert zulaufen. Der Bestand wird um einen festen Wert schwanken. Teilweise werden sich Zyklen ergeben, bei denen sich niedrige und hohe Populationsbestände abwechseln. Diese unterschiedlich hohen Bestände schwanken allerdings jeweils eng um einen konkreten Wert. Hohe Reproduktionsfaktoren führen, wie schon im Basis-Tool zu beobachten war, zum Aussterben.

Ähnlich zum Abschnitt 2.4.2 lassen insbesondere die Graphiken zu Konkurrenzmodell 1 erkennen, dass eine geschlossene mathematische Beschreibung der Plots durch Funktionen nicht möglich ist. Dennoch sind die Erkenntnisse gerade zum Konkurrenzmodell

1 hinsichtlich der unterschiedlichen Ergebnisse wertvoll und sollten festgehalten werden. Der Grund für die einzelnen Entwicklungen kann später mit Hilfe des mathematischen Modells geklärt werden. An dieser Stelle ist eine Vorgabe durch den Lehrer in der Form notwendig, dass das letzte Tool, die Simulation zur Bestimmung der Reproduktionskurve, benutzt wird. Bevor die Simulationen im Tool gestartet werden, muss genau geklärt werden, was in diesem Tool simuliert wird und welche Aussage die anschließend dargestellten Grafiken beinhalten. Die folgenden Abbildungen zeigen mögliche Ergebnisse in dem Tool für das jeweilige Konkurrenzmodell.

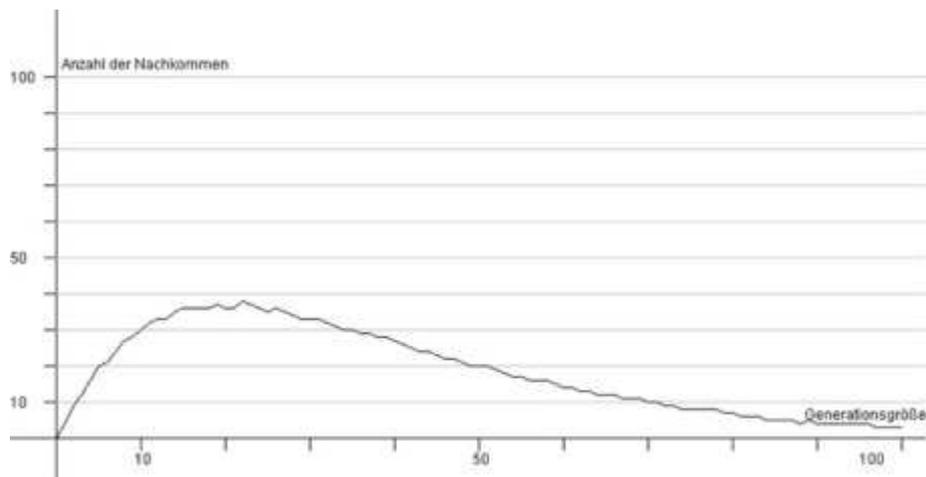


Abbildung 2.53: Konkurrenzmodell 1: Reproduktionskurve bei $q = 5$ und $N=100$

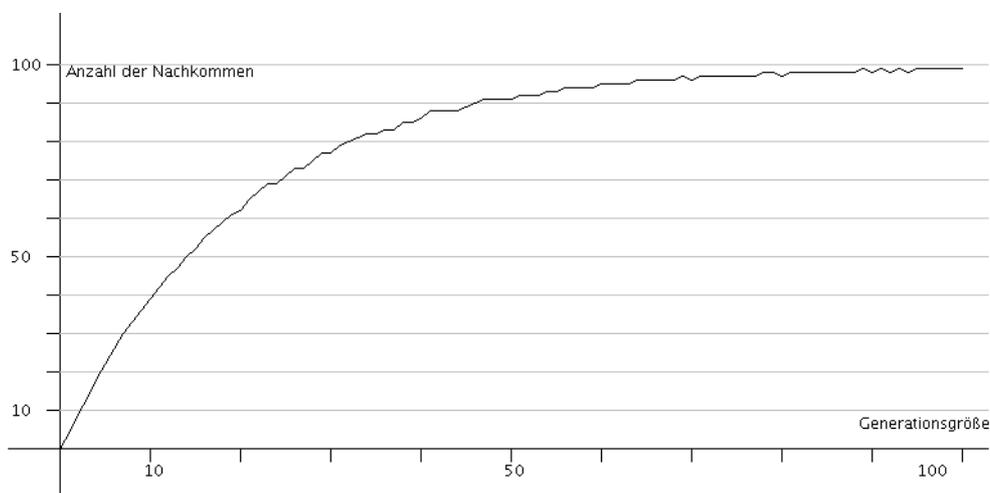


Abbildung 2.54: Konkurrenzmodell 2: Reproduktionskurve bei $q = 5$ und $N=100$

Beide Grafiken zeigen einen Verlauf, der durch eine Funktion angenähert werden kann. Bei der Kurve zu Konkurrenzmodell 1 ist der Typ einer passenden Funktion in der Regel nur versierten Mathematikern bekannt. Es ist zu bezweifeln, dass Schüler hier eine Funktion des Typs $f(x) = x \cdot e^{-x}$ erkennen. Bei Konkurrenzmodell 2 sollte allerdings eine Exponentialfunktion erkannt werden. In den folgenden zwei Abschnitten wird erläutert, wie man in der Schule die jeweiligen Reproduktionsfunktionen herleiten kann. In beiden Fällen wird zunächst von einer allgemeinen Reproduktionsfunktion $R(n)$ ausgegangen. Erst am Ende

wird die endgültige Reproduktionsfunktion konkret definiert. Zu Beginn wird der vermutlich einfachere Weg zur Bestimmung der Reproduktionsfunktion zu Konkurrenzmodell 2 dargestellt.

Die Reproduktionsfunktion zu Konkurrenzmodell 2

Zur Bestimmung einer passenden Reproduktionsfunktion bei Konkurrenzmodell 2 bietet es sich an, die Werte in eine Tabellenkalkulation zu exportieren, da so eine Linearisierung sehr einfach und schnell realisiert werden kann. Die Kurve nähert sich immer mehr dem Wert des Parameters N an. Betrachtet man nun die Differenz $N - R(n)$ und logarithmiert diese Werte, so erhält man eine Gerade. Hierbei ist zu bemerken, dass zuvor erkannt werden muss, dass es sich bei der gesuchten Funktion um eine Funktion des Typs $f(x) = K - Ke^{-cx}$ handelt. Wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben, können andere Ideen zur Approximation durch einfaches Testen verworfen werden. Die Schritte zur Linearisierung ergeben sich dabei aus den Schritten, die nötig sind, um den angenommenen Funktions-term zum linearen Term $-cx$ umzuformen. Es ergibt sich schließlich:⁴⁸

$$R(n) = N - k \cdot e^{cn} \quad \text{mit } c < 0 \quad (2.49)$$

Die Rolle der Modellparameter q und N muss noch geklärt werden. Über das Extremalprinzip kann weiter vorgegangen werden. Es ist einsichtig, dass für die Reproduktionsfunktion gelten muss:

$$R(0) = 0 \quad (2.50)$$

Mit dieser Voraussetzung resultiert:

$$N - k \cdot e^0 = 0 \quad (2.51)$$

$$k = N \quad (2.52)$$

Über die Annahme $R'(0) \approx q$ kann die Konstante c wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt näher bestimmt werden. Es ergibt sich schließlich die Reproduktionsfunktion zu Konkurrenzmodell 2 mit den Modellparametern q und N :

$$R_{q,N}(n) = N - N \cdot e^{-\frac{n \cdot q}{N}} \quad (2.53)$$

$$(2.54)$$

Mit dieser Reproduktionsfunktion kann ein deterministisches Bestandsmodell erstellt werden, bei dem der Bestand B in diskreten Zeitschritten berechnet wird:

$$B(t+1) = R(B(t)) \quad (2.55)$$

Im Anschluss an die Herleitung sollte das so entworfene Modell mit den Ergebnissen des Tools zur langfristigen Beobachtung verglichen werden. Dies kann beispielsweise mit einer Tabellenkalkulation oder auch mit einem Computer-Algebra-System (CAS) erfolgen. Zur Vertiefung sollten weitere Simulationsergebnisse der Reproduktionssimulationen mit anderen Parametern q und N von den Schülern selbständig untersucht werden. Die Bestimmung eines konkreten deterministischen Modells über die Linearisierung und die Diskussion der Kurve führen zu einer Vertiefung der Mathematisierung und somit zu einem tieferen Verständnis der gesamten Modellierung.

⁴⁸Eine genauere Herleitung ist in Abschnitt 2.4.2 nach zu lesen.

Die Reproduktionsfunktion zu Konkurrenzmodell 1

Die Ermittlung des Funktionstyps für die Reproduktionskurve zu Konkurrenzmodell 1 ist etwas langwieriger, da der Funktionstyp nicht direkt erkennbar ist. An dieser Stelle sollte durch den Lehrer der Hinweis gegeben werden, dass es hilfreich sein wird, die individuelle Reproduktion zu betrachten. Dazu sollten die Werte in eine Tabellenkalkulation exportiert und dort weiter analysiert werden. Die individuelle Reproduktion, die durch das Teilen der Abszissenwerte durch die jeweiligen Ordinatenwerte ermittelt wird, stellt sich in der Grafik so dar, dass sie beispielsweise durch eine Hyperbel, aber auch durch den Graphen einer Exponentialfunktion angenähert werden kann. Betrachtet man den Kehrwert und den natürlichen Logarithmus der Werte, so erkennt man, dass die Annahme der Hyperbel keine neuen Erkenntnisse liefert, die logarithmische Abtragung der Werte allerdings eine Gerade ergibt.

$$R_{-2}(n) = c_1 \cdot n + c_0; c_1 < 0 \quad (2.56)$$

Es kann sein, dass dieser Vorgang der Linearisierung bei den Schülern schon aus den Fächern Physik oder Chemie bekannt ist. Andernfalls sollte er anhand weiterer entsprechend vorbereiteten Wertetabellen vertiefend eingeübt werden. Diese Vorgehensweise ist schließlich der Schlüssel zur funktionalen Beschreibung der Reproduktionskurve. Werden die Schritte zur Linearisierung umgekehrt, so resultiert eine Funktion zur Beschreibung der Reproduktion.⁴⁹

$$R(n) = k \cdot n \cdot e^{cn}; c < 0 \quad (2.57)$$

Auch hier muss die Rolle der Parameter q und N noch bestimmt werden. Die folgenden Überlegungen sind für Schüler sicherlich nachvollziehbar, benötigen allerdings eine engere Führung durch den Lehrer. Analog zu den Überlegungen kann auch hier angenommen werden, dass die Steigung der Reproduktionsfunktion im Punkt $(0|0)$ mit q etwa gleichgesetzt werden kann.

$$R'(n) = (knc + k) \cdot e^{cn} \quad (2.58)$$

$$R'(0) = k \quad (2.59)$$

$$\Rightarrow k \approx q \quad (2.60)$$

Dadurch wird q als linearer Parameter in die Funktion integriert.

Im Reproduktionstool werden für das Konkurrenzmodell 1 neben der Kurve auch die maximale Reproduktion und die Populationsgröße mit maximaler Reproduktion angegeben. Da die maximale Reproduktion bei steigendem Wert für N ebenfalls steigt, kann man die Schüler eine Tabelle anlegen lassen, in der diese maximalen Reproduktionen für unterschiedliche Werte für N aufgelistet werden. Die Suche nach einem funktionalen Zusammenhang liefert eine lineare Funktion mit der Steigung $\frac{1}{e}$ und dem Abszissenabschnitt 0.

$$\text{Max}(N) = \frac{N}{e} \quad (2.61)$$

Die Rolle des Parameters N in der Reproduktionsformel kann durch Anwendung des notwendigen Kriteriums zur Existenz von Extremstellen bestimmt werden. Dieses Kriterium sollte den Schülern aus der allgemeinen Kurvendiskussion geläufig sein. Mit der Nullstelle der ersten Ableitung und dem Wert des Maximums kann auch der zweite fehlende Parameter c im Funktionsterm bestimmt werden.

$$c = -\frac{q}{N} \quad (2.62)$$

⁴⁹Eine genauere Darstellung der Herleitung ist in Abschnitt 2.4.2 nach zu lesen.

Somit ergibt sich folgende Reproduktionsfunktion mit den Modellparametern q und N :

$$R_{q,N}(n) = q \cdot n \cdot e^{-\frac{n \cdot q}{N}} \quad (2.63)$$

Mit Hilfe dieser Reproduktionsfunktion kann ein deterministisches Bestandsmodell für die Population entworfen werden, bei dem der Bestand B der Population in diskreten Zeitschritten berechnet wird.

$$B(t+1) = R(B(t)) \quad (2.64)$$

Somit wurde eine experimentelle Herleitung des Ricker-Modells auf der Basis eines einfachen Konzeptmodells unter Benutzung von Schulmathematik entwickelt.

Ähnlich wie bei der Herleitung des Modells zu Konkurrenzmodell 2 sollten auch hier weitere konkrete Berechnungen den Vorgang der Mathematisierung vertiefen. Im Rückgriff auf die Sonderfälle kann nun anhand der Reproduktionskurve genau untersucht werden, unter welchen Umständen der Bestand um einen festen Wert schwankt bzw. einen festen Wert annimmt oder wann ein Zyklus auftritt.

2.5 Mathematische Ansätze ohne Simulationen

Die nun folgenden Überlegungen sind aufgrund ihrer Komplexität nicht unbedingt in der Schule einsetzbar. Dennoch sollten sie hier erwähnt werden, da sie im universitären Bereich Anwendung finden können. Es handelt sich dabei um Ansätze, auf Basis des Konzeptmodells ohne Simulationsergebnisse mathematische Modelle her zu leiten.

2.5.1 Der kombinatorische Ansatz

Die Verteilung von Samen auf eine Feld mit Kästchen, wie es in der Beschreibung des Kästchenmodells dargestellt wird, erinnert stark an das Kugel-Fächer-Modell aus der Kombinatorik, bei dem Kugeln auf Fächer verteilt werden.⁵⁰ Bei den klassischen Fragestellungen geht es in der Regel einerseits um das Problem n Kugeln auf k Fächer zu verteilen, wobei jedes Kästchen nur einfach besetzt werden darf. Andererseits wird nach der Anzahl der Möglichkeiten gefragt, n Kugeln auf k Fächer zu verteilen, wobei die Anzahl der Kugeln, die in einem Fach landen beliebig ist.

Teil 1: Konkurrenzmodell 1

Der dargestellte Ansatz geht über die Verteilung der Samen und untersucht, wie viele Möglichkeiten es gibt, n Samen so zu verteilen, dass eine bestimmte Anzahl von Kästchen einfach besetzt bleibt.

Zunächst wird eine Zufallsgröße definiert:

$$X_1 = \text{Anzahl der einfach besetzten Kästchen}$$

⁵⁰Die mathematischen Grundlagen der unterschiedlichen Varianten beim Kugel-Fächer-Modell werden in Abschnitt 3.4 dargestellt.

Es sollen nun $(n - k)$ einfach besetzte Kästchen betrachtet werden. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit von genau $(n - k)$ einfach besetzten Kästchen und schließlich der Erwartungswert von X_1 ermittelt.

Zunächst gibt es $\binom{N}{n-k}$ Möglichkeiten aus den N Kästchen $(n - k)$ als einfach besetzt auszuzeichnen. Es verbleiben k Samenkörner, die so verteilt werden müssen, dass jeder nun besetzte Topf mindestens zweifach besetzt ist. Für diese Verteilung verbleiben $N - (n - k)$ Kästchen.

Um eine Doppelbesetzung zu erreichen, werden l Paare von Körnern so verteilt, dass jedes Paar in einem separaten Kästchen landet. Bei $k > 1$ können mindestens 1 aber höchstens $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ solcher Paare verteilt werden. Nach dem Verteilen dieser l Paare verbleiben $k - 2l$ Körner, die auf die nun schon doppelt besetzten Kästchen beliebig verteilt werden können. Es werden nun l Paare auf die $N - (n - k)$ noch nicht besetzten Kästchen verteilt. Die Anzahl der Möglichkeiten dafür beträgt:

$$\binom{N - (n - k)}{l} \quad (2.65)$$

Es verbleiben noch $k - 2l$ Körner, die nun auf l jeweils durch Körnerpaare besetzte Kästchen beliebig verteilt werden müssen. Die Anzahl der Möglichkeiten dafür beträgt:

$$\binom{l + (k - 2l) - 1}{k - 2l} = \binom{k - l - 1}{k - 2l} \quad (2.66)$$

Da, wie bereits erwähnt, l die Werte 1 bis $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ annehmen kann, müssen die jeweiligen Anzahlen addiert werden. Es ergibt sich für die Anzahl der Möglichkeiten, k Körner so auf $N - (n - k)$ Kästchen zu verteilen, dass jedes besetzte Kästchen mindestens doppelt belegt ist, folgende Summenformel:

$$\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{N - (n - k)}{l} \cdot \binom{k - l - 1}{k - 2l} \quad (2.67)$$

Für die Wahrscheinlichkeit, P_k $(n - k)$ einfach besetzter Kästchen ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} P_k(X_1 = (n - k)) &= \frac{\binom{N}{n-k} \cdot \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{N - (n - k)}{l} \cdot \binom{k - l - 1}{k - 2l}}{\binom{N + n - 1}{n}} \\ &= \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\binom{N}{n-k} \cdot \binom{N - (n - k)}{l} \cdot \binom{k - l - 1}{k - 2l}}{\binom{N + n - 1}{n}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Die Zufallsgröße X_1 kann die Werte 0 bis n annehmen. Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße gibt somit die mittlere Anzahl der einfach besetzten Kästchen an:

$$\begin{aligned} e_{N,n} &= \mathbb{E}X_1 \\ &= \sum_{k=0}^n P_k(X_1 = (n - k)) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Eine konkrete Berechnung oder eine asymptotische Betrachtung dieser Formel erscheint sehr schwierig. Der kombinatorische Ansatz liefert für das Konkurrenzmodell 1 zwar eine Lösung, die allerdings aufgrund ihrer komplexen Form nicht praktikabel ist.

Teil 2: Konkurrenzmodell 2

In dieser Fragestellung geht es um die durchschnittliche Anzahl von besetzten Kästchen. Die Anzahl der Möglichkeiten n Samen auf N Kästchen zu verteilen ist gegeben durch den folgenden Binomialkoeffizienten:

$$\binom{N+n-1}{n} \quad (2.70)$$

Es wird folgende Zufallsgröße definiert:

$$X_2 = \text{Anzahl der besetzten Kästchen}$$

Der Sonderfall $X_2 = 1$ bedeutet, dass sämtliche Samen im gleichen Kästchen gelandet sind. Da hierfür N Kästchen zur Verfügung stehen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall:

$$P(X_2 = 1) = \frac{N}{\binom{N+n-1}{n}} = \frac{N! \cdot n!}{(N+n-1)!} \quad (2.71)$$

Ein weiterer Sonderfall, bei dem jedes Samenkorn alleine in einem Kästchen gelandet ist, hat die Wahrscheinlichkeit:

$$P(X_2 = n) = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N+n-1}{n}} \quad (2.72)$$

Im Allgemeinen wird nun der Fall betrachtet, dass $(n-k)$ Kästchen bei der Verteilung besetzt werden. Hierbei werden zunächst $(n-k)$ Samen so auf N Kästchen verteilt, dass auch genau $(n-k)$ Kästchen besetzt sind. Es handelt sich um die Anzahl der $(n-k)$ -elementigen Teilmengen einer N -elementigen Menge. Diese Anzahl wird mit dem folgenden Binomialkoeffizienten angegeben:

$$\binom{N}{n-k} \quad (2.73)$$

Es verbleiben k Samenkörner, die nun beliebig auf die $(n-k)$ bereits besetzten Kästchen verteilt werden müssen. Die Anzahl der Möglichkeiten für diese Verteilung beträgt:

$$\binom{n-k+k-1}{k} = \binom{n-1}{k} \quad (2.74)$$

Allgemein kann die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung von $(n-k)$ Kästchen mit folgendem Term angegeben werden:

$$P(X_2 = (n-k)) = \frac{\binom{N}{n-k} \cdot \binom{n-1}{k}}{\binom{N+n-1}{n}} \quad (2.75)$$

Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße gibt somit die Anzahl der durchschnittlich besetzten Kästchen an:

$$\mathbb{E}X_2 = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{n-1}{n-i}}{\binom{N+n-1}{n}} \quad (2.76)$$

Für kleine Werte von n kann hier eine Asymptotik mit $N \rightarrow \infty$ betrachtet werden.⁵¹ Diese ist allerdings in diesem Fall nicht sinnvoll, da sich die Werte von n im Laufe der Zeit immer mehr N annähern. Daher ist fest zu stellen, dass der kombinatorische Ansatz auch für das Konkurrenzmodell 2 kein einfach zugängliches und praktikables Ergebnis liefert.

⁵¹vgl. Abschnitt 3.4

2.5.2 Eine Modellvariante: Binomialverteilung

Es handelt sich bei dieser Variante um einen neuen Ansatz.⁵² Wiederum wird der Lebensraum begrenzt angenommen und mit dem Kästchenmodell visualisiert. Die Anzahl der Kästchen N gibt in dieser Variante die Anzahl der zur Verfügung stehenden Brutplätze im Lebensraum an. Die weiteren Überlegungen erfolgen am Beispiel einer fiktiven Insektenart.

Ein einzelnes Individuum durchstreift auf der Suche nach geeigneten Brutplätzen den Lebensraum und wandert von Brutplatz zu Brutplatz. An jedem potentiellen Brutplatz ist das Individuum mit einer angenommenen, festen Wahrscheinlichkeit p_N erfolgreich und kann ein Ei ablegen. Da die Eiablage in einem bestimmten Zeitraum erfolgen muss, ist die Erfolgswahrscheinlichkeit an jedem Platz abhängig von der Größe des Lebensraumes bzw. von der Anzahl der Brutplätze, wobei folgender antiproportionale Zusammenhang mit festen p^* ($0 \leq p^* \leq 1$) angenommen wird:

$$p_N = \frac{p^*}{N} \quad (2.77)$$

Die Anzahl der möglichen Runden pro Individuum wird ferner mit q angenommen, so dass bei n Individuen insgesamt $q \cdot n$ Runden „gelaufen“ werden.

Aufgrund dieser Annahmen kann die Verteilung der Eier als Bernoulliexperiment aufgefasst werden, bei dem auf jedes Kästchen eine bestimmte Anzahl von Eiern binomial verteilt wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Kästchen nach der Verteilung k Eier liegen, wird dann durch folgende Formel ermittelt:

$$P(X = k) = \binom{qn}{k} p_N^k \cdot (1 - p_N)^{qn-k} \quad (2.78)$$

Die durchschnittliche Anzahl der in ein Kästchen gefallenen Samen kann somit über den Erwartungswert der Zufallsgröße ermittelt werden.

Ein entscheidender Unterschied zum bisherigen Konzeptmodell ist die Tatsache, dass bei diesem Ansatz nach der Verteilung Eier verloren oder gewonnen werden können. Dementgegen ist fest zu halten, dass dieser Ansatz mathematisch zugänglicher ist.

Teil 1: Ein Modell zu Konkurrenzmodell 1

Es wird folgende Zufallsgröße definiert:

$$X_i = \text{Anzahl der in Kästchen } i \text{ insgesamt abgelegten Eier } (i = 1, 2, \dots, N)$$

Hierbei ist X_i unabhängig von X_j für unterschiedliche i und j .

Da im derzeit betrachteten Konkurrenzmodell lediglich die Kästchen betrachtet werden, die genau 1 Ei nach der Verteilung erhalten haben, wird eine weitergehende Zufallsgröße definiert:

$$\hat{X}_i = \begin{cases} 1 & : X_i = 1 \\ 0 & : X_i = 0 \vee X_i \geq 2 \end{cases} \quad (2.79)$$

⁵²Die hier dargestellte Variante beruht auf ähnlichen Ausgangsüberlegungen wie die Darstellungen von Chung in [7] S. 198

Die Summe $\sum_{i=1}^N \widehat{X}_i$ gibt somit die Anzahl der einfach besetzten Kästchen an. Demnach beschreibt der Erwartungswert dieser Summe die mittlere Anzahl der einfach besetzten Kästchen:

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e1}_{N,n} &:= \mathbb{E} \sum_{i=1}^N \widehat{X}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \widehat{X}_i \\
&= N \cdot \mathbb{E} \widehat{X}_i \\
&= N \cdot P(X_i = 1) \\
&= N \cdot \binom{qn}{1} \cdot p_N \cdot (1 - p_N)^{qn-1} \\
&= \binom{qn}{1} \cdot N \cdot p_N \cdot (1 - p_N)^{qn-1} \\
&= qn \cdot N \cdot p_N \cdot (1 - p_N)^{qn-1} \\
\mathbf{e1}_{N,n} &= qn \cdot N \cdot p_N \cdot (1 - p_N)^{qn-1} \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Mit $p_N = \frac{p^*}{N}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e1}_{N,n} &= qn \cdot N \cdot \frac{p^*}{N} \cdot \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{qn-1} \\
&= n \cdot p^* \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{qn-1} \tag{2.81}
\end{aligned}$$

Der so ermittelte Term gilt für ein Modell mit endlich vielen Kästchen und endlich vielen Individuen. Interessant ist jedoch zu untersuchen, wie sich dieser Term verhält, wenn der Lebensraum unendlich groß wird.

Zur Grenzwertbetrachtung wird folgende Substitution gemacht:

$$\begin{aligned}
x &:= \frac{qn}{N} \\
\Leftrightarrow qn &= x \cdot N \tag{2.82}
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e1}_{N,n} &= x \cdot N \cdot p^* \cdot \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{x \cdot N - 1} \\
&= x \cdot N \cdot p^* \cdot \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{x \cdot N} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p^*}{N}} \tag{2.83}
\end{aligned}$$

Der relative Anteil $R(n)$ an einfach besetzten Kästchen beträgt somit:

$$R(n) = x \cdot p^* \cdot \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{x \cdot N} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p^*}{N}} \tag{2.84}$$

Wird nun der Grenzfall $N \rightarrow \infty$ betrachtet, so resultiert:⁵³

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(n) = x \cdot p^* \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{x \cdot N} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{N}}$$

⁵³vgl. Chung 1974 [7] S. 193

$$\begin{aligned}
&= x \cdot p^* \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{p^*}{N} \right)^N \right)^x \cdot 1 \\
&= x \cdot p^* \cdot e^{-p^* x} \cdot 1
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Die Resubstitution von x liefert schließlich für den relativen Anteil der einfach besetzten Kästchen im Grenzfall:

$$R(n) = \frac{qn}{N} \cdot p^* \cdot e^{-p^* \frac{qn}{N}} \tag{2.86}$$

Die Anzahl der einfach besetzten Kästchen kann somit durch folgenden Term angegeben werden:

$$\text{Anzahl} = p^* \cdot q \cdot n \cdot e^{-\frac{p^* q n}{N}} \tag{2.87}$$

Mit p^* und q zu $\tilde{q} := p^* \cdot q$ ergibt sich folgende Reproduktionsfunktion:

$$R_{(\tilde{q}, N)}(n) = \tilde{q} \cdot n \cdot e^{-\frac{\tilde{q} n}{N}} \tag{2.88}$$

Die hier hergeleitete Formel entspricht in der allgemeinen Form der Reproduktionsfunktion im Ricker-Modell

Teil 2: Ein Modell zu Konkurrenzmodell 2

Die grundsätzlichen Überlegungen aus dem vorangegangenen Abschnitt sind analog zu übernehmen. Die Definition der zusätzlichen Zufallsgröße muss für dieses Konkurrenzmodell allerdings angepasst werden. Während bei Konkurrenzmodell 1 die Kästchen betrachtet werden, die genau ein Samenkorn beinhalten, geht es nun um die Kästchen, die mindestens ein Samenkorn bei der Verteilung erhalten haben. Dazu wird eine neue Zufallsgröße definiert:

$$\hat{Y}_i = \begin{cases} 1 & : Y_i = 0 \\ 0 & : Y_i > 0 \end{cases} \tag{2.89}$$

Der Erwartungswert der Summe $\sum_{i=1}^N \hat{Y}_i$ gibt nun die Anzahl der nicht besetzten Kästchen an.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{2N,n} &:= \mathbb{E} \sum_{i=1}^N \hat{Y}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \hat{Y}_i \\
&= N \cdot \mathbb{E} \hat{Y}_i \\
&= N \cdot P(Y_i = 0) \\
&= N \cdot \binom{qn}{0} (1 - p_N)^{qn} \\
&= N \cdot (1 - p_N)^{qn} \\
\mathbf{e}_{2N,n} &= N \cdot (1 - p_N)^{qn}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

$e_{2_{N,n}}$ gibt die durchschnittliche Anzahl der nicht besetzten Kästchen an. Demnach gibt der folgende Term die Anzahl der mindestens einfach besetzten Kästchen an:

$$N - e_{2_{N,n}} = N - N \cdot (1 - p_N)^{qn}$$

Mit $p_N = \frac{p^*}{N}$ folgt:

$$N - e_{2_{N,n}} = N - N \cdot \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{qn}$$

Wird qn wieder durch $x \cdot N$ substituiert, so ergibt sich:

$$N - e_{2_{N,n}} = N - N \cdot \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{xN}$$

Der relative Anteil $R(n)$ der mindestens einfach besetzten Kästchen kann demnach mit folgendem Term angegeben werden:

$$R(n) = 1 - \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{xN} \quad (2.91)$$

Wird nun der Grenzfall $N \rightarrow \infty$ betrachtet, so folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} R(n) &= 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p^*}{N}\right)^{xN} \\ &= 1 - e^{-p^* \cdot x} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Die Resubstitution von x liefert:

$$1 - e^{-\frac{qp^*n}{N}} \quad (2.93)$$

Die Anzahl $R_{(N,q)}(n)$ der reproduktionsfähigen Nachkommen einer Elterngeneration mit n Individuen kann demnach folgendermaßen angegeben werden:

$$R_{(N,q)}(n) = N - N \cdot e^{-\frac{qp^*n}{N}} \quad (2.94)$$

Mit $\tilde{q} := p^* \cdot q$ folgt schließlich:

$$R_{(N,\tilde{q})}(n) = N - N \cdot e^{-\frac{\tilde{q} \cdot n}{N}} \quad (2.95)$$

Wie bereits die Formel zu Konkurrenzmodell 1 entspricht auch diese Formel der entsprechenden Reproduktionsfunktion, die aus der Analyse der Simulationsergebnisse hergeleitet wurde.

Kapitel 3

Modelle zum Massenwirkungsgesetz

Während biologisch oder auch physikalisch motivierte Modelle im Mathematikunterricht häufiger besprochen werden, sind Modelle aus der Chemie im Mathematikunterricht eher selten zu finden. Dennoch spielt die Mathematik in der Chemie keine geringe Rolle, da sie in vielen Bereichen genutzt wird. In diesem Kapitel werden Wege dargestellt, wie das Massenwirkungsgesetz für reversible Reaktionen im Gleichgewicht mit Hilfe eines stochastischen Konzeptmodells entwickelt werden kann.

Vor der Entwicklung des Konzeptmodells werden zunächst die chemischen Grundlagen dargestellt und anschließend ein Blick darauf geworfen, wie in Schul- und Lehrbüchern das Massenwirkungsgesetz und der dabei wichtige Begriff der Reaktionsgeschwindigkeit hergeleitet bzw. erklärt werden.

In Abschnitt 3.2 wird ein Modell basierend auf dem bereits bekannten Kästchenmodell entwickelt, wobei sämtliche Modellierungsschritte auf stark vereinfachten Veranschaulichungen der betrachteten Reaktion beruhen. Daran anschließend werden Simulationstools beschrieben, mit deren Hilfe die Reaktion visualisiert werden kann und weitergehende Darstellungen erfolgen, die schließlich zum Massenwirkungsgesetz hinführen. Zusätzlich werden Grundideen zur unterrichtlichen Umsetzung der Tools in der Schule vorgestellt. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden mathematische Modellierungsansätze vorgestellt, die lediglich auf dem Konzeptmodell basieren und die Simulationstools nicht nutzen.

3.1 Chemische Grundlagen

3.1.1 Reaktionsgeschwindigkeit und Massenwirkungsgesetz

In der Chemie werden Stoffe, Stoffeigenschaften und deren Veränderungen aber auch Methoden zur Stoffanalyse und -synthese sowie die Darstellung der Untersuchungsobjekte in Form von Modellen behandelt. In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, wie der Begriff der Reaktionsgeschwindigkeit in Lehr- und Schulbüchern der Chemie hergeleitet und erklärt wird.

Bei Reaktionen reagieren unterschiedliche Stoffe miteinander. Beispielsweise verbinden sich Stoffe zu neuen Stoffen oder zerfallen in ihre Ausgangsstoffe. Es wird der Einfachheit

halber eine Reaktion betrachtet, bei der aus zwei Stoffen A und B der Stoff C entsteht.¹



Bei dieser Reaktion reagieren die Ausgangsstoffe (A, B), die sogenannten *Edukte*, zu einem neuen Stoff (C), dem sogenannten *Produkt*. Das bedeutet, dass eine Veränderung der jeweiligen Teilchenmengen oder auch der Stoffkonzentrationen im Laufe der Reaktion festzustellen ist.

Reaktionsgeschwindigkeit

Der Begriff der Geschwindigkeit ist allgemein als momentane Änderung einer Größe mit der Zeit erklärt. Die Reaktionsgeschwindigkeit kann dementsprechend durch die Änderung der Konzentrationen pro Zeiteinheit beschrieben werden. Diese Geschwindigkeit der Reaktion kann dabei als **Bildungsgeschwindigkeit** des Produktes oder auch als **Verbrauchsgeschwindigkeit** eines Eduktes angegeben werden.² Die Verbrauchsgeschwindigkeit bei der betrachteten Reaktion wird entsprechend mit

$$\nu_A = -\frac{d[A]}{dt}, \quad \left(= -\frac{d[B]}{dt} \right) \quad (3.2)$$

die Bildungsgeschwindigkeit mit

$$\nu_C = \frac{d[C]}{dt} \quad (3.3)$$

angegeben. Hierbei bezeichnen $[A]$, $[B]$ und $[C]$ die Konzentrationen der jeweiligen Stoffe. Beide Reaktionsgeschwindigkeiten sind gleich.³

Allgemein wird weiter angenommen, dass diese Geschwindigkeit proportional zur Konzentration der Ausgangsstoffe sind. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit ν_H der Reaktion $A + B \rightarrow C$ proportional zum Produkt der Stoffe A und B ist:

$$\begin{aligned} \nu_H &\sim [A] \cdot [B] \\ \nu_H &= k_H \cdot [A] \cdot [B] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Das Massenwirkungsgesetz

Bei manchen Reaktionen kommt es vor, dass nicht nur die Edukte zum Produkt reagieren, sondern gleichzeitig das Produkt auch in die Ausgangsstoffe zerfällt.



Diese Reaktionen heißen **reversible Reaktionen**. Die Beobachtung der Konzentrationen der einzelnen Reaktanden zeigt, dass sich nach einiger Zeit ein Gleichgewicht einstellt, bei dem die Konzentrationen sich nicht mehr ändern. Obwohl die Konzentrationen gleich

¹Es werden in diesem Kapitel stets Reaktionen mit geringen Konzentrationen der Reaktanden betrachtet, die in einer Lösung oder im gasförmigen Zustand ablaufen. Generell wird dabei von einer homogenen Verteilung der Stoffe ausgegangen.

²vgl. Atkins 1996 [1] S. 816

³Aufgrund der negativen Änderung des Eduktes wird die Geschwindigkeit wieder positiv. Die Gleichheit folgt direkt aus der Stöchiometrie. Vgl. auch Atkins 1996 [1] S. 816

bleiben, reagieren die Edukte weiter zum Produkt bzw. zerfällt das Produkt in die Edukte. Aufgrund der noch immer stattfindenden Reaktionen wird auch vom **dynamischen Gleichgewicht** gesprochen. Ein Beispiel für solche reversiblen Reaktionen ist die Bindung von Sauerstoff (O_2) an das Protein Myoglobin (Mb):⁴



Die norwegischen Chemiker C. M. GULDBERG⁵ und P. WAAGE⁶ führten über 300 quantitative Untersuchungen von Gleichgewichten unterschiedlicher Reaktionen durch und leiteten aus den gewonnenen Daten 1867 das sogenannte Massenwirkungsgesetz her:

Der Quotient aus dem Produkt der Konzentrationen der Produkte und dem Produkt der Konzentrationen der Edukte hat im Gleichgewicht für jede Temperatur einen konstanten Wert.

Übertragen auf eine Reaktion der Form $A + B \rightleftharpoons C$ im Gleichgewicht bedeutet das:

$$\frac{[C]}{[A][B]} = K. \quad (3.7)$$

Die Konstante K wird hierbei als Gleichgewichtskonstante bezeichnet.

In der formalen Herleitung des Gesetzes werden bei der Reaktion zwei Teilreaktionen, die Hin- und die Rückreaktion, getrennt betrachtet.

Die Geschwindigkeit ν_R einer Reaktion, bei der ein Stoff in seine Ausgangsstoffe zerfällt, etwa $C \rightarrow A + B$, ist analog zu den obigen Überlegungen proportional zur Konzentration des Stoffes:

$$\begin{aligned} \nu_R &\sim [C] \\ \nu_R &= k_R \cdot [C] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Somit können die jeweiligen Reaktionsgeschwindigkeiten ν_H und ν_R auf folgende Weise angegeben werden:

$$\nu_H = k_H \cdot [A] \cdot [B] \quad (3.9)$$

$$\nu_R = k_R \cdot [C] \quad (3.10)$$

Im Gleichgewichtszustand ändern sich die Konzentrationen trotz weiter laufender Reaktion nicht mehr. Das bedeutet, dass die beiden Reaktionsgeschwindigkeiten gleich sind:

$$\begin{aligned} \nu_H &= \nu_R \\ k_H \cdot [A] \cdot [B] &= k_R \cdot [C] \\ \Leftrightarrow \frac{k_H}{k_R} &= \frac{[C]}{[A] \cdot [B]} \end{aligned}$$

Mit $K := \frac{k_H}{k_R}$ folgt (3.7).

3.1.2 Herleitungen und Erklärungsansätze

Im Folgenden werden Herleitungen und Erklärungsansätze zu Reaktionsgeschwindigkeit und dem Massenwirkungsgesetz aus der Schul- und Fachliteratur exemplarisch vorgestellt. Es wird dabei kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

⁴vgl. Stryer 1999 [28] S. 166

⁵Cato Maximilian Guldberg 1836 - 1902

⁶Peter Waage 1833-1900

Reaktionsgeschwindigkeit

In manchen Schulbüchern der Sekundarstufe II wird die Reaktionsgeschwindigkeit über die Konzentrationsänderung der Reaktanden eingeführt:

„**Reaktionsgeschwindigkeit.** Verfolgt man z. B. die Konzentration eines sich bildenden Stoffes [...], so kann man die mittlere Reaktionsgeschwindigkeit \bar{v} im Zeitintervall Δt angeben durch:

$$\bar{v} = \frac{c(t_1 + \Delta t) - c(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta c}{\Delta t}$$

[...]

Für eine Reaktion $A + B \rightarrow C + D$ gilt:

$$\frac{dc(C)}{dt} = \frac{dc(D)}{dt} = -\frac{dc(A)}{dt} = -\frac{dc(B)}{dt}$$

Es ist daher in diesem Fall unerheblich, welche Teilchen man zur Bestimmung der Reaktionsgeschwindigkeit auswählt. Bei der Reaktion $1A + 2B \rightarrow 3C + 4D$ kann man eine ähnliche Gleichheit erreichen, wenn man die Konzentrationsänderung noch durch die zugehörigen stöchiometrischen Zahlen v_i dividiert:

$$\frac{1}{3} \frac{dc(C)}{dt} = \frac{1}{4} \frac{dc(D)}{dt} = -\frac{1}{1} \frac{dc(A)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dc(B)}{dt}$$

Die so erhaltene Geschwindigkeit hängt nicht mehr vom gewählten Reaktionspartner ab:

$$v = \frac{1}{v_i} \frac{dc_i}{dt}$$

Der Index i nummeriert die Reaktionspartner.“⁷

Je nach Größe der thermodynamischen Parameter kann eine Reaktion schneller oder langsamer ablaufen. Dazu zählen unter anderem die Temperatur oder der Druck. Daneben ist die Konzentration der einzelnen Edukte von entscheidender Bedeutung. Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Reaktionsgeschwindigkeit und Konzentration der Edukte wird eine Modellvorstellung benutzt, nach der die Teilchen als Kugeln aufgefasst werden, die sich frei im Raum bewegen.⁸ Eine Reaktion findet in diesem Modell nur dann statt, falls die für die Reaktion relevanten Teilchen resp. Kugeln aneinander stoßen, weshalb auch von der **allgemeinen Stoßtheorie** gesprochen wird. Die Änderung der Konzentration der Edukte pro Zeiteinheit ist somit direkt mit der Anzahl der Zusammenstöße der Kugeln verbunden. Die Anzahl der Stöße zwischen den unterschiedlichen Kugeln ist dabei abhängig von der Konzentration der einzelnen Stoffe. Eine hohe Konzentration entspricht dabei einer großen Menge an Kugeln in einem begrenzten Raum. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich dabei Kugeln treffen, es also zu einer Reaktion kommt, ist dann sehr hoch und nimmt bei abfallender Konzentration ab. Diese anschauliche Erklärung wird durch die folgende Modellüberlegung verdeutlicht.⁹

⁷Eisner 2000 [10] S. 68f

⁸Diese Bewegung wird durch Druck und Temperatur stark beeinflusst. Beispielsweise sind Wassermoleküle bei Temperaturen unter 0° C starr in einer Gitterstruktur angeordnet. Bei Temperaturen über 100° C ist das Wasser gasförmig und die Wassermoleküle sind im Raum frei beweglich.

⁹Die hier vorgestellte Modellüberlegung stammt aus Wedler 1997 [34] S. 893ff. Die dort benutzten Bezeichnungen wurden übernommen. Im Folgenden wird dieses Modell auch als *Zylindermodell* bezeichnet.

Es wird davon ausgegangen, dass die Teilchen von Stoff B (als Kugeln) im Raum fixiert sind und die Teilchen von Stoff A sich geradlinig mit einer Geschwindigkeit \bar{v}_{AB} durch den Raum bewegen (vgl. Abb. 3.1).

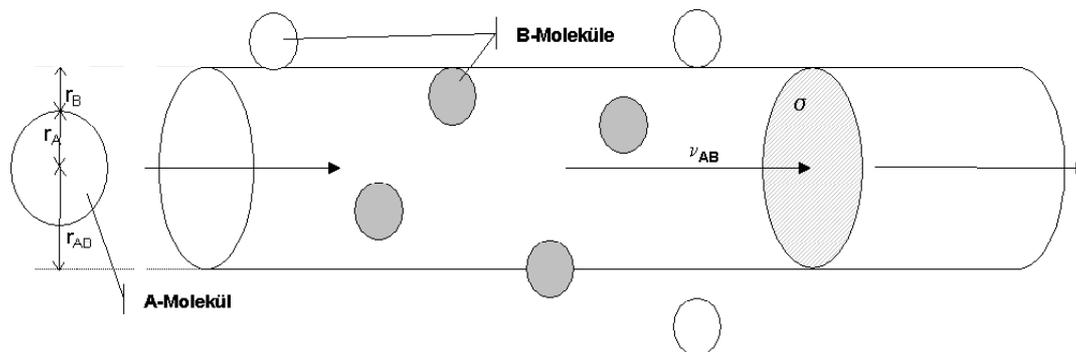


Abbildung 3.1: Zur Ermittlung der Stoßzahl im Zylindermodell

Die Radien der Kugeln zu den beiden Stoffen A und B seien r_A und r_B . Wird nur ein A -Teilchen betrachtet, so wird es nur dann mit einem Teilchen von Stoff B zusammenstoßen, wenn dessen Mittelpunkt maximal um $r_{AB} = r_A + r_B$ von der Bahn des A -Teilchens entfernt liegt. Durch den Radius r_{AB} und die Bewegung des A -Teilchens in einer Zeiteinheit ($\Delta t = 1$) entsteht ein Zylinder. Die Anzahl der Stöße in einer Zeiteinheit ist abhängig von der Anzahl der B -Teilchen, deren Mittelpunkte in diesem Zylinder liegen (in Abb. 3.1 grau gefärbt).

Es seien nun σ die Querschnittsfläche des Zylinders und N_A bzw. N_B die Anzahl der A - bzw. B -Teilchen, die sich in einem Zeitabschnitt in dem Zylinder befinden. Dann ist die Anzahl der Stöße Z_{AB} zwischen A - und B -Teilchen in diesem Zylinder pro Zeiteinheit zunächst gegeben durch:

$$Z_{AB} = \sigma \bar{v}_{AB} N_A N_B \quad (3.11)$$

Tatsächlich führen nicht alle Stöße, sondern nur ein Bruchteil, der durch den Faktor F angegeben wird, zu einer Reaktion:

$$Z_{AB} \cdot F = \sigma \bar{v}_{AB} N_A N_B \cdot F \quad (3.12)$$

Die Anzahlen N_A und N_B beziehen sich auf das Volumen des Zylinders. Sie sind proportional zur Konzentration der Stoffe anzunehmen und können demnach als Vielfache der Stoffkonzentrationen angegeben werden. Die Anzahl der Stöße bezieht sich auf einen Zeitschritt. Da durch die Anzahl der Stöße die Anzahl der Reaktionen pro Zeiteinheit angegeben wird, kann so die Geschwindigkeit J der Reaktion beschrieben werden:

$$J = Z_{AB} \cdot F = \sigma \bar{v}_{AB} \lambda_A [A] \lambda_B [B] \cdot F \quad (3.13)$$

Die Zusammenfassung aller Konstanten ergibt die sogenannte **Geschwindigkeitsgleichung** mit der **Geschwindigkeitskonstanten** k für die momentane Reaktionsgeschwindigkeit¹⁰.

$$J = k \cdot [A][B] \quad (3.14)$$

¹⁰Der hier sehr schnelle Übergang von der Anzahl der Stöße zur momentanen Reaktionsgeschwindigkeit wird in der Fachliteratur ausführlicher dargestellt. Eine detailliertere Darstellung würde den Rahmen der Arbeit sprengen. Es wird daher auf die Fachliteratur wie beispielsweise Hollemann/Wiberg 1995 [14] oder auch Wedler 1997 [34] verwiesen.

Diese Geschwindigkeitskonstante ist für jede Reaktion je nach weiteren Bedingungen (Druck, Temperatur etc.) unterschiedlich. Abb. 3.1.2 zeigt für die Reaktion¹¹



unterschiedliche Geschwindigkeitskonstanten bei unterschiedlichen Temperaturen.¹²

Temperatur	Geschwindigkeitskonstante in $[1/mol \cdot s]$	
$t^\circ C$	Hinreaktion	Rückreaktion
356	$2,53 \times 10^{-3}$	$3,02 \times 10^{-5}$
393	$1,42 \times 10^{-2}$	$2,20 \times 10^{-4}$
443	$1,40 \times 10^{-1}$	$2,50 \times 10^{-3}$
508	$1,34 \times 10^0$	$3,96 \times 10^{-2}$

Abbildung 3.2: Geschwindigkeitskonstanten der HI-Bildung und -Zersetzung

In manchen Schulbüchern für die Sekundarstufe II wird die momentane Reaktionsgeschwindigkeit ebenfalls über die Stoßtheorie eingeführt:

„Die **Reaktionsgeschwindigkeit** ist von verschiedenen Faktoren abhängig, wie vom Zerteilungsgrad [...] und der Konzentration der Edukte [...]. Nach der **Stoßtheorie** müssen Edukt-Teilchen zusammenstoßen, damit sie miteinander reagieren können. Bei einem Feststoff können nur die Teilchen, die sich an der Oberfläche befinden, reagieren. Je größer diese ist, umso schneller verläuft die Reaktion. In einer Lösung ist die Anzahl der möglichen Stöße zwischen den Edukt-Teilchen umso größer, je mehr Teilchen in einem bestimmten Volumen enthalten sind, je größer also die Stoffkonzentration ist [...].

[...] Für eine bimolekulare Reaktion zwischen zwei Eduktteilchen A und B zeigt das Modell [...], dass die Stoßzahl z proportional zum Produkt der Teilchenzahlen in einem bestimmten Volumen, also proportional der Konzentration der beiden Edukte ist.

$$z \sim c(\mathbf{A}) \cdot c(\mathbf{B})$$

Unter der Annahme, dass die Momentangeschwindigkeit proportional zur Stoßzahl ist, gilt:

$$v_r = k \cdot c(\mathbf{A}) \cdot c(\mathbf{B})$$

Darin bedeutet k die **Geschwindigkeitskonstante**. Sie hat für jede Reaktion unter bestimmten Bedingungen einen charakteristischen Wert.“¹³

Das Modell der allgemeinen Stoßtheorie ist eine starke Vereinfachung der Realität. Die Betrachtung im Zylinder beinhaltet auch die Möglichkeit, dass ein A -Teilchen nach dem ersten Zusammenstoß mit einem B -Teilchen einen weiteren Zusammenstoß mit anderen B -Teilchen haben kann. Die Bedeutung der erfolgten Reaktionen bzw. der erfolgreichen Verbindungen wird nicht betrachtet. Neben dieser Vereinfachung ist die Annahme, dass sich die Teilchen geradlinig bewegen, kritisch zu betrachten, da sie nur für sehr kleine Zeitintervalle und geringe Konzentrationen gilt. Dem Verbrauch und den Freiwerden von Energie wird ebenfalls keine Beachtung geschenkt.

¹¹Es handelt sich hierbei um die Bildung bzw. den Zerfall von Iodwasserstoff (HI). Die Bildung ist exotherm, weshalb sie auch als Hinreaktion bezeichnet wird. Korrekterweise muss die Reaktionsgleichung folgendermaßen dargestellt werden:

$H_2 + I_2(g) \rightleftharpoons 2HI + 9,46kJ$; vgl. Hollemann/Wiberg [14] S. 185

¹²vgl. Hollemann/Wiberg 1995 [14] S. 185

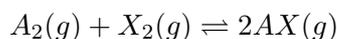
¹³vgl. Tausch/Wachtendonk 2001 [31] S. 33

3.1.3 Das Massenwirkungsgesetz

Das Massenwirkungsgesetz ergibt sich in der Fachliteratur meist als Folge der Untersuchung von Gleichgewichtsreaktionen:

„[...]

Betrachten wir die reversible Reaktion



[...]

Hinreaktion:

$$v_h = k_h \cdot c(A_2) \cdot c(X_2) \quad (15.1)$$

Rückreaktion:

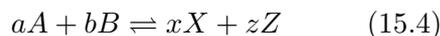
$$v_r = k_r \cdot c^2(AX) \quad (15.2)$$

Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} v_h &= v_r \\ k_h \cdot c(A_2) \cdot c(X_2) &= k_r \cdot c^2(AX) \\ \frac{c^2(AX)}{c(A_2) \cdot c(X_2)} &= \frac{k_h}{k_r} = K \end{aligned} \quad (15.3)$$

[...]

Gleichung (15.3) ist ein Beispiel für das Massenwirkungsgesetz. Für eine allgemeine chemische Reaktion (15.4) gilt die allgemeine Formulierung des Massenwirkungsgesetzes (15.5). [...]



$$\frac{c^x(X) \cdot c^z(Z)}{c(A) \cdot c(B)} = [K] \quad (15.5)$$

[...]“¹⁴

Die anschauliche Erklärung erfolgt in der Schule mit Hilfe unterschiedlicher Modelle. Ein besonders originelles Modell ist die Geschichte vom sogenannten *Holzäpfelkrieg*. Bei diesem Modell wird folgende Situation geschildert:¹⁵

In zwei aneinander grenzende Gärten fallen die faulen Äpfel eines Apfelbaumes, die sogenannten Holzäpfel. Der eine Garten gehört einem jungen, sportlichen Mann, der andere einem älteren, nicht mehr ganz agilen Mann. Beide Männer wollen den Nachbarn ärgern, indem sie die Holzäpfel aus ihrem Garten in den Garten des anderen werfen. Zunächst ist der junge Mann sehr schnell und schafft es auch, fast alle Holzäpfel aus seinem Garten in den des Nachbarn zu werfen (vgl. Abb. 3.4). Dabei muss er aber im Laufe der Zeit immer weitere Wege zurücklegen, da die Dichte der Äpfel immer mehr abnimmt. Seine Wurffrequenz nimmt ab. Der ältere Mann ist zunächst stark benachteiligt, da er die Äpfel nicht so schnell sammeln und zurückwerfen kann wie sein

¹⁴vgl. Atkins 1996 [1] S. 269f

¹⁵vgl. Dickerson/Geis 1981 [8] S.321ff

sportlicher Nachbar. Im Laufe der Zeit nimmt aufgrund der hohen Wurffrequenz des jungen Mannes die Dichte der Äpfel im Garten des alten Mannes zu (vgl. Abb. 3.4 und 3.5). Diesem fällt es nun leichter, Äpfel zu nehmen und zurück zu werfen, seine Wurffrequenz erhöht sich. Im Gleichgewichtszustand ist die Wurffrequenz auf beiden Seiten gleich, da der ältere Mann aufgrund der höheren Dichte schneller, der jüngere Mann aufgrund der geringeren Dichte langsamer werfen kann (vgl. Abb. 3.7).

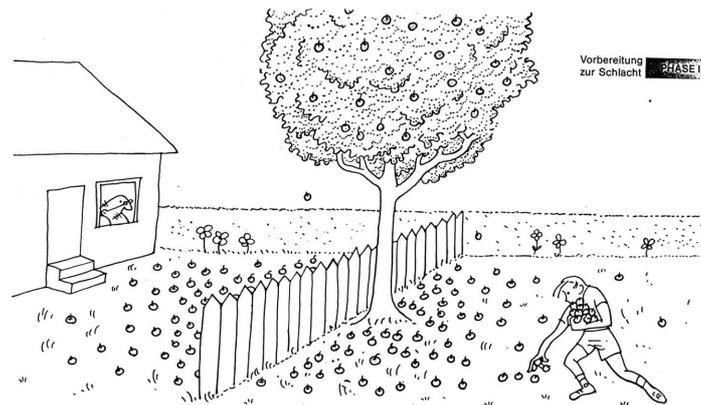


Abbildung 3.3: Holzapfelkrieg Phase 1

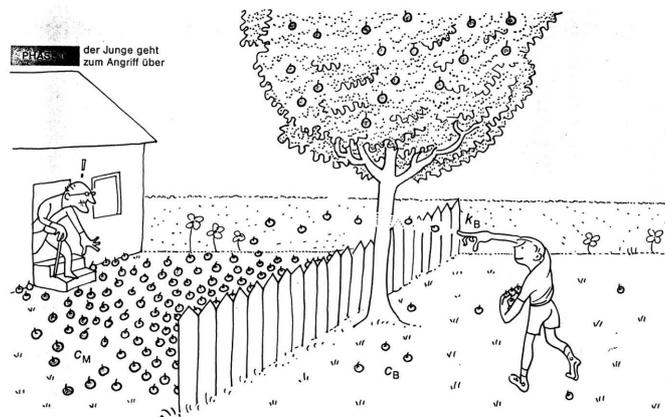


Abbildung 3.4: Holzapfelkrieg Phase 2

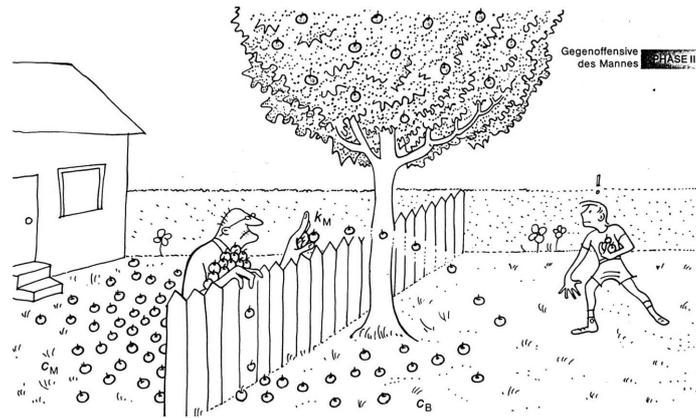


Abbildung 3.5: Holzapfelkrieg Phase 3

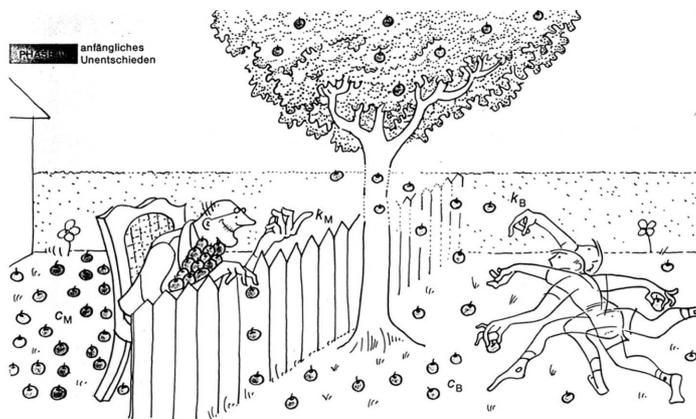


Abbildung 3.6: Holzapfelkrieg Phase 4

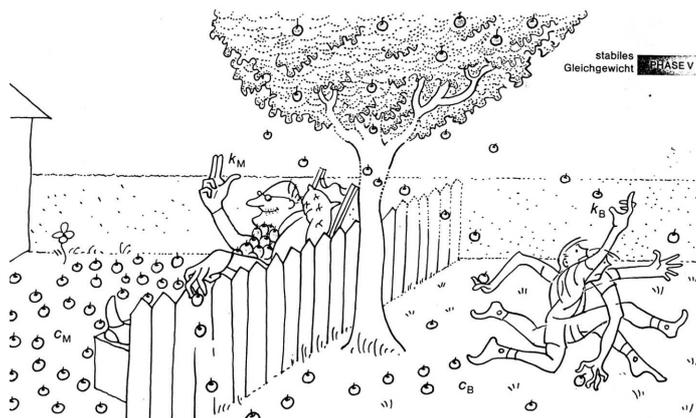


Abbildung 3.7: Holzapfelkrieg Phase 5

Bei einem weiteren Modell werden zwei Gefäße A und B betrachtet.¹⁶ Gefäß A ist mit einer bestimmten Menge an Flüssigkeit gefüllt, Gefäß B ist leer. In Jedem Schritt wird gleichzeitig mit zwei Rohren ein bestimmter Anteil aus den jeweiligen Gefäßen (α_A bzw. α_B) entnommen und in das andere Gefäß überführt (vgl. Abb. 3.8).

¹⁶vgl. Tausch 1993 [30] S. 92

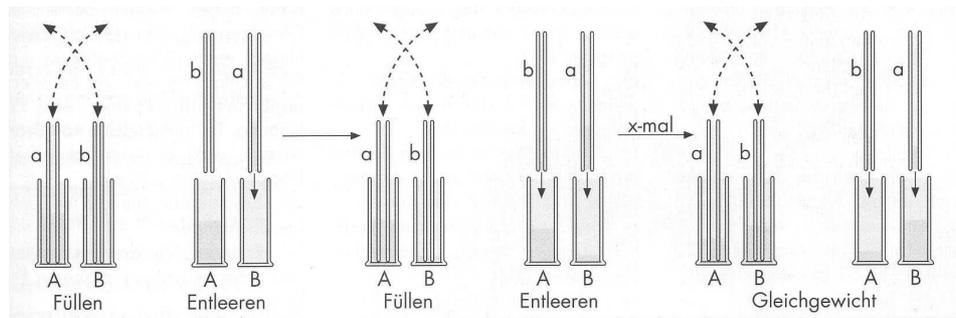


Abbildung 3.8: Veranschaulichung der Einstellung des dynamischen Gleichgewichts durch den sogenannten Stechheberversuch

Der Vorgang ist mathematisch mit zwei ineinander verschachtelten Iterationsvorschriften für den Inhalt der jeweiligen Gefäße ($V_A(t)$ bzw. $V_B(t)$) zum Zeitpunkt t beschreibbar:

$$V_A(t+1) = V_A(t) - \alpha_A V_A(t) + \alpha_B V_B(t) \quad (3.16)$$

$$V_B(t+1) = V_B(t) - \alpha_B V_B(t) + \alpha_A V_A(t) \quad (3.17)$$

In Abb. 3.9 ist die Entwicklung der Füllmenge mit folgenden Parametern grafisch dargestellt:

Parameter	Wert
$V_A(0)$	500 ml
$V_B(0)$	0 ml
α_A	0,03
α_B	0,12

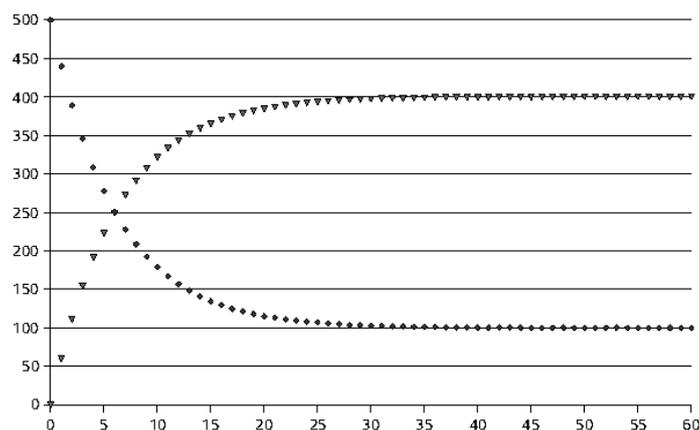


Abbildung 3.9: Einstellung des Gleichgewichts beim Stechheberversuch (Abszisse: Zeitschritte; Ordinate: Füllmenge von Stoff A (Raute) und Stoff B (Dreieck))

3.1.4 Diskussion

Sowohl das Modell des Holzapfelkriegs als auch der Stechheberversuch sind ohne Zweifel sehr anschauliche Möglichkeiten zur Illustration der Einstellung eines dynamischen

Gleichgewichtes. Es ist allerdings zu bemerken, dass die dabei zu Grunde gelegten Elementaroperationen („Werfen eines Apfels“ bzw. „Überführen einer bestimmten Wassermenge“) weniger mit einer chemischen Reaktion als eher mit einem Transportphänomen gemeinsam haben. Diffusionsvorgänge werden durch diese Modelle sehr gut beschrieben. Eine Visualisierung der Vorgänge bei einer Reaktion auf Teilchenebene erfolgt nicht, die Schüler sind gezwungen, den Weg über die bereits abstrakte Reaktionsgeschwindigkeit zu gehen. Ebenso wird eine direkte Begründung der Proportionalität der Geschwindigkeit zur Stoffkonzentration nicht konkret geliefert.

Allgemein ist festzuhalten, dass die Herleitung der Reaktionsgeschwindigkeit über die allgemeine Stoßtheorie aber auch die Modelldarstellungen zum Massenwirkungsgesetz Fragen offen lassen oder auf stark einschränkenden Voraussetzungen basieren.

Im folgenden Abschnitt wird ein Modell entworfen, mit dem versucht wird, die Vorgänge bei der betrachteten Reaktion auf Teilchenebene darzustellen. Es soll hierdurch ein allgemeinerer Ansatz zur Beschreibung erfolgen, der auch in Form von aufeinander aufbauenden Simulationstools die Visualisierungslücke bei der Erklärung des Massenwirkungsgesetzes schließen soll.

3.2 Modellierung

In diesem Abschnitt soll wieder die einfache Reaktion der Form



genauer betrachtet und ein Konzeptmodell erstellt werden, mit dessen Hilfe die Reaktion simuliert werden kann.¹⁷ Ähnlich wie bereits im Kapitel 2 bei der Modellierung der Konkurrenzsituationen, wird auch hier eine sehr starke Vereinfachung der Realität durchgeführt, die mehr als Metapher zu verstehen ist. Gleichzeitig wird jedoch versucht, die Vereinfachungen aus der Realität heraus zu begründen.

Im ersten Abschnitt wird das Modell entwickelt. In einem weiteren Abschnitt wird dieses Modell verglichen mit der Modellierung in der gängigen Fachliteratur zur Herleitung der Reaktionsgeschwindigkeit, die im Kapitel 3.1 vorgestellt wurde.

3.2.1 Ein Kästchenmodell für chemische Reaktionen

Zur Vereinfachung wird die Reaktion in diskreten Zeitschritten - etwa wie mit einem Stroboskop beleuchtet - beobachtet. In jedem Zeitschritt wird eine Momentaufnahme mit entsprechend großer Vergrößerung auf Teilchenebene betrachtet. Ferner wird davon ausgegangen, dass das Gemisch homogen ist, so dass Gleichverteilung der einzelnen Stoffteilchen anzunehmen ist, und auch die Position eines Teilchens zum Zeitpunkt t_i keine Prognosen für dessen Position zum Zeitpunkt t_{i+1} zulässt.

Gestartet wird mit einer möglichen Anfangskonfiguration, bei der die beiden Stoffe A und B in Lösung in einem Reagenzglas gemischt werden.¹⁸ Zu Beginn ist kein Teilchen des späteren Produktes C in diesem Gemisch zu finden. Die Teilchen „schweben“ förmlich durch das Gefäß; Im Laufe der Zeit reagieren Teilchen der Edukte zu Produktteilchen,

¹⁷Auch hier wird wieder angenommen, dass die Reaktion in Lösung bzw. in gasförmigem Zustand mit geringen Konzentrationen abläuft.

¹⁸Grundsätzlich ist es auch möglich mit einer Konfiguration zu starten, bei der bereits Teilchen des Stoffes C vorhanden sind.

Produktteilchen zerfallen aber auch in Eduktteilchen. Eine Momentaufnahme zum Anfangszeitpunkt t_0 könnte (schematisch) folgendes Aussehen haben:

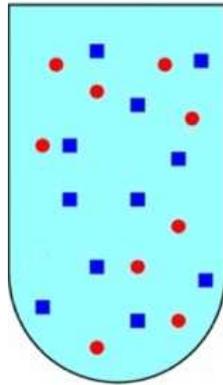


Abbildung 3.10: Momentaufnahme der Reaktion $A + B \rightleftharpoons C$ zur Startzeit t_0 (Stoff A: rot, Stoff B: blau)

Die Teilchen der Stoffe A und B schweben frei im Raum und befinden sich zu diesem Zeitpunkt auf festen Positionen im Reagenzglas. Die Lage der Teilchen in festgelegten Positionen könnte mit Hilfe des bereits bekannten Kästchenmodells zweidimensional dargestellt werden:

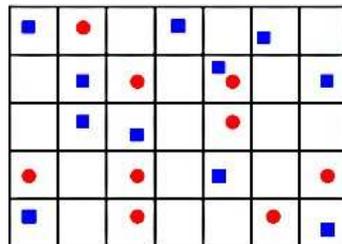


Abbildung 3.11: Darstellung der Lage der Teilchen mit Hilfe des Kästchenmodells (Stoff A: rot, Stoff B: blau)

Jedes Kästchen in diesem System steht dabei zunächst für einen konkret definierten Bereich im Reagenzglas. Die Teilchen, die sich in diesem Bereich befinden, werden symbolisch in dem jeweiligen Kästchen dargestellt.

Die Anzahl der jeweiligen Teilchen ist zu jedem Zeitpunkt - zumindest theoretisch - bestimmbar. Manche der Eduktteilchen stehen eventuell kurz vor einer Verbindungsreaktion.

Nach einiger Zeit wird die Situation im Reagenzglas anders sein, da inzwischen Teilchen von Stoff C entstanden sind. Eine entsprechende Momentaufnahmen könnte folgendes Aussehen haben.

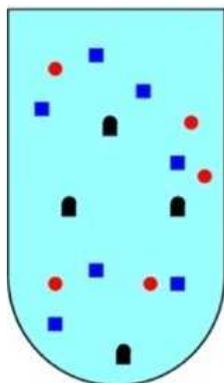


Abbildung 3.12: Momentaufnahme der Reaktion $A + B \rightleftharpoons C$ zum Zeitpunkt t_i (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

Die Anzahlen der einzelnen Teilchen haben sich verändert. Für jedes inzwischen entstandene Produktteilchen ist jeweils ein Teilchen der Ausgangsstoffe verbraucht worden. Auch hier sind die jeweiligen Teilchen festen Positionen im Reagenzglas zuzuordnen. Die entsprechende schematische Darstellung im Kästchensystem ist in Abb. 3.13 zu sehen.

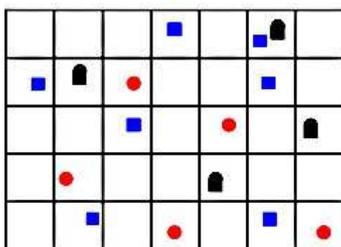


Abbildung 3.13: Darstellung der Lage der Teilchen zum Zeitpunkt t_i im Kästchenmodell (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

Wird nun angenommen, dass zum nächsten Zeitschritt die direkt anstehenden Reaktionen auf Teilchenebene abgelaufen sind, so wird sich das Ergebnis in folgender Momentaufnahme darstellen lassen:

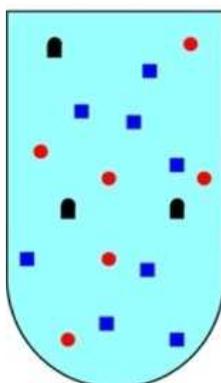


Abbildung 3.14: Momentaufnahme der Reaktion $A + B \rightleftharpoons C$ zum Zeitpunkt t_{i+1} (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

Die eben noch sehr nah beieinander liegenden Eduktteilchen reagierten teilweise zu einem neuen C -Teilchen. Im Kästchensystem entspricht dies folgender Darstellung:

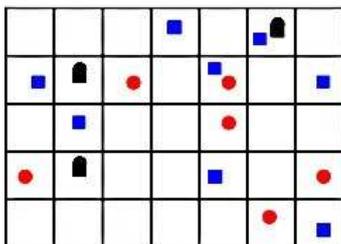


Abbildung 3.15: Kästchendarstellung der Reaktion zum Zeitpunkt t_{i+1} (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

Durch die Darstellung im Kästchenmodell wird einerseits deutlich, dass die räumliche Nähe der Teilchen entscheidend für das Zustandekommen einer Reaktion ist. Bezogen auf die Darstellung im Kästchenmodell kann eine Verbindungsreaktion in einem Kästchen demnach nur dann stattfinden, wenn in dem Kästchen mindestens ein Teilchen von jedem Edukt vorhanden ist.

Zugegebenermaßen ist die obige Darstellung der Reaktion sehr stark vereinfacht. Es werden sehr viele wichtige Faktoren bei dieser Betrachtung außer Acht gelassen. Dennoch liefert diese karikierende Darstellung eine Vorstellung der Mechanismen, die weitergehende Modellierungsschritte ermöglicht. Die angenommene Reaktion zwischen den Ausgangsstoffen A und B findet spontan statt. Aufgrund thermodynamischer Gesetzmäßigkeiten kann eine solche Reaktion nur stattfinden, wenn entsprechend viel Energie zur Verfügung steht.¹⁹ Wird davon ausgegangen, dass die Energie von außen konstant gehalten wird, so verbraucht die Verbindungsreaktion dennoch Energie. Ein einzelnes Kästchen kann somit auch dahingehend interpretiert werden, dass es für die Energiemenge steht, die pro Zeitschritt für eine Reaktion zur Verfügung steht. Das hat zur Folge, dass in diesem Modell trotz entsprechend mehrfacher Besetzung eines Kästchens mit Teilchen der Edukte nur eine Reaktion stattfindet.

Die Anzahl der Verbindungsreaktionen in einem Zeitschritt kann somit durch die Anzahl der Kästchen modelliert werden, die zu diesem Zeitpunkt von jedem Edukt mindestens ein Teilchen beinhalten.

Während die Verbindungsreaktion von zwei Reaktanden (A und B) abhängig ist, wird der Zerfall von Stoff C lediglich von den äußeren Bedingungen beeinflusst. Es wird davon ausgegangen, dass die Anzahl der Eduktteilchen auf die Zerfallsreaktion von Stoff C ebenfalls keinen Einfluss hat. Der Zerfall ist unter diesen Voraussetzungen dahingehend modellierbar, dass in jedem Zeitschritt ein Teilchen von Stoff C mit einer festen Wahrscheinlichkeit zerfällt, die mit z bezeichnet wird. Im Durchschnitt werden daher in jedem Zeitschritt t_i von den c_i C -Teilchen $z \cdot c_i$ Teilchen zerfallen.

Die Anzahl der jeweiligen Teilchen und somit auch die Konzentration der einzelnen Stoffe zum Zeitpunkt t_{i+1} kann durch folgende Bilanzrechnung dargestellt werden.

Hierzu seien a_i , b_i und c_i die jeweiligen Teilchenanzahlen der Reaktanden zum Zeitpunkt t_i mit $a_i, b_i \geq 0$ und $c_0 = 0$.²⁰ Mit k_i sei die Anzahl der Kästchen bezeichnet, die zum

¹⁹Stryer stellt in [28] fest, dass eine Reaktion nur dann spontan ablaufen kann, wenn ΔG (Änderung der freien Energie) negativ ist, also insgesamt Energie verbraucht wird. vgl. ebd. S. 194f

²⁰Auch hier wird von der bereits beschriebenen Ausgangskonfiguration ausgegangen, die jedoch keineswegs bindend ist.

Zeitpunkt t_i mit mindestens einem Teilchen jedes Eduktes besetzt sind. Die Anzahl der jeweiligen Stoffteilchen zum Zeitpunkt t_{i+1} kann nun folgendermaßen beschrieben werden.

$$a_{i+1} = a_i - k_i + zc_i \quad (3.19)$$

$$b_{i+1} = b_i - k_i + zc_i \quad (3.20)$$

$$c_{i+1} = c_i + k_i - zc_i \quad (3.21)$$

Diese Bilanzgleichungen sind Basis eines computergestützten, stochastischen Modells zur Simulation einer chemischen Reaktion der dargestellten Form. In Abschnitt 3.3 werden dieses Basistool sowie darauf aufbauende Tools beschrieben, die Ergebnisse aus den Simulationen ausgewertet und Ideen zur Umsetzung im Unterricht dargestellt.

Im folgenden Abschnitt soll allerdings zunächst das dargestellte Modell kurz mit dem Modell zur Herleitung der Formel zur Reaktionsgeschwindigkeit verglichen werden.

3.2.2 Das Kästchenmodell als Grenzfall? Verbindungen zum Stoßmodell

Zunächst muss nochmals festgehalten werden, dass das entworfene Konzeptmodell eine Metapher der realen Abläufe darstellt. Es wird kein Anspruch auf eine vollständige Übertragbarkeit erhoben. Dennoch ist ein Vergleich mit dem Zylindermodell sinnvoll.

In dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Zylindermodell entsteht durch die angenommene geradlinige Bewegung eines A -Teilchens und dem sogenannten Reaktionsradius ein Zylinder. Der Radius des Zylinders wird dabei durch die Radien der einzelnen Eduktteilchen bestimmt, die Höhe entspricht der angenommenen Strecke, die das A -Teilchen in einem Zeitschritt ($\Delta t = 1$) zurücklegt. Dieser Zylinder kann somit auch als *Einheitsraum* betrachtet werden. Zunächst wird in diesem Zylinder eine bestimmte Anzahl von B -Teilchen angenommen. Die Anzahl der Stöße eines A -Teilchens in einer Zeiteinheit wird dann über die Anzahl der B -Teilchen in diesem Einheitsraum modelliert. Zur Bestimmung der Anzahl sämtlicher Stöße zwischen Teilchen von A und B wird anschließend die Anzahl der A -Teilchen im Einheitsraum also deren Dichte mit in die Formel einbezogen. Auf diese Weise wird die Reaktionsgeschwindigkeit über die Anzahl von Stößen in einem Zeitschritt hergeleitet.

Ähnlich wie beim Zylindermodell wird auch beim Kästchenmodell ein Einheitsraum betrachtet. Jedes Kästchen repräsentiert einen fest definierten Raum im Reagenzglas. Im Gegensatz zum Zylinder wird dieser Einheitsraum allerdings nicht über die Geschwindigkeit eines Teilchens definiert. Die Teilchen werden im Kästchenmodell aufgrund der Momentanaufnahmen als fest stehende Objekte betrachtet. Die Größe des Kästchens wird vielmehr mit über die Energie definiert, die notwendig ist, um in einem Zeitschritt genau eine Verbindungsreaktion ablaufen zu lassen. Die Anzahl der jeweiligen Teilchen in diesem Kästchen wird bei beiden Stoffen direkt über die Dichte bestimmt, kann allerdings wegen der zufälligen Verteilung schwanken. Durch die Kombination mehrerer Kästchen kann so der gesamte Reaktionsraum modelliert werden.

Die problematischen Annahmen im Zylindermodell (geradlinigen Bewegung des Teilchens und die Überlegung, dass ein A -Teilchen in einem Zeitschritt mehrfach mit Teilchen von Stoff B zusammenstoßen kann) sind in der Modellierung mit dem Kästchenmodell nicht notwendig. Sowohl die Interpretation eines Kästchens als Energiedepot, in dem in einem Zeitschritt genau eine Reaktion stattfinden kann, als auch die Umsetzung des Zerfalls über eine konstante Zerfallswahrscheinlichkeit sind aus der Realität motiviert und begründbar.

vorhandene C -Teilchen wird per Zufallsgenerator mit vorgegebener Zerfallswahrscheinlichkeit „ausgewürfelt“, ob es zerfällt. Die Kästchen, in denen ein C -Teilchen zerfällt, werden mit einem schwarzen Z markiert. Im Anschluss daran wird bilanziert, wie viele Teilchen von jedem Stoff in diesem Zeitschritt entstanden sind; diese Anzahl wird im oberen Teil der Arbeitsumgebung angezeigt. Zum besseren Vergleich wird in zwei Spalten die Anzahl der Teilchen sowohl vor als auch nach dem Zeitschritt angegeben. Im unteren Bereich kann entnommen werden, wieviele Reaktionen im jeweiligen Zeitschritt abgelaufen sind und wieviele C -Teilchen sich zersetzt haben.

Das Gleichgewichtstool: Wie entwickeln sich die Teilchenzahlen im Laufe der Zeit?

Ähnlich wie beim ersten Tool gibt es hier die Möglichkeit, die Startwerte der einzelnen Stoffmengen sowie den Zerfallskoeffizienten bzw. die Zerfallswahrscheinlichkeit einzugeben. Zusätzlich kann die Anzahl der Zeitschritte, für welche die Simulation ausgeführt werden soll, aber auch die Anzahl der parallel durchzuführenden Simulationen angegeben werden. Aus den jeweiligen Simulationsergebnissen wird dann das arithmetische Mittel bestimmt und dieses in der Grafik dargestellt. Mit dem „Reset-Knopf“ können die Standardwerte zurückgesetzt werden.

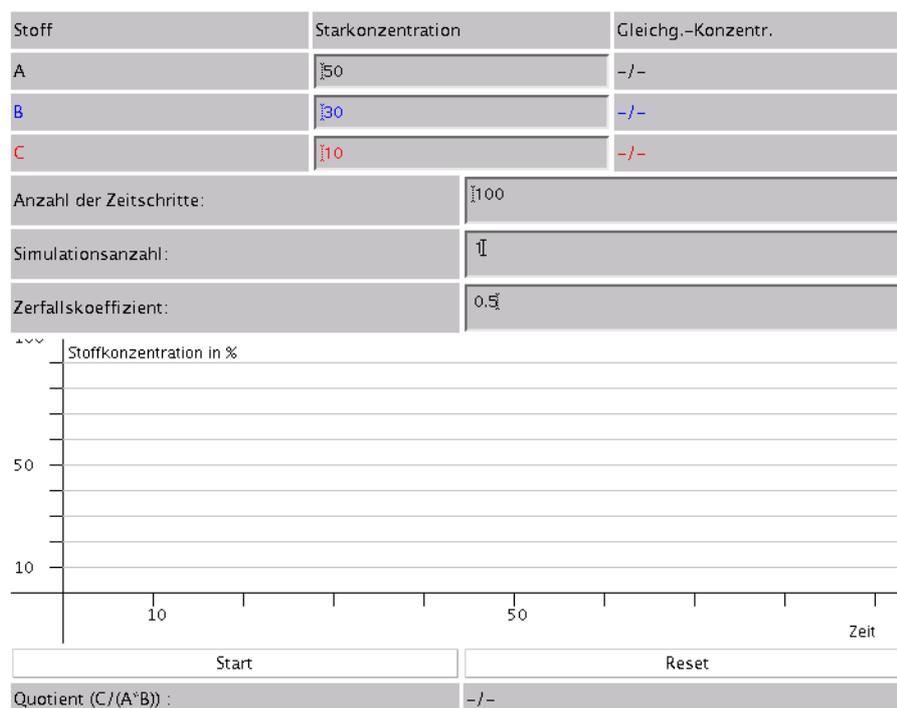


Abbildung 3.17: Screenshot der Arbeitsumgebung des Gleichgewichtstools

In der Regel wird die Grafik deutlich machen, dass sich die einzelnen Stoffmengen nach entsprechend langer Zeit im Gleichgewichtszustand befinden. Die entsprechenden Konzentrationen werden in drei gesonderten Feldern im oberen Teil der Arbeitsumgebung angegeben. Unterhalb der Knöpfe wird der Quotient aus der Produktkonzentration und dem Produkt der Edukt-Konzentrationen im Gleichgewichtszustand angegeben.

Das MWG-Tool:

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Produktkonzentration und den Eduktkonzentrationen im Gleichgewichtszustand?

In diesem Tool gibt es nur noch eingeschränkte Möglichkeiten, Werte selbst vorzugeben. Lediglich die Anzahl der Experimente, die Laufzeit jedes einzelnen Experimentes und der Zerfallskoeffizient von Stoff *C* kann angegeben werden.

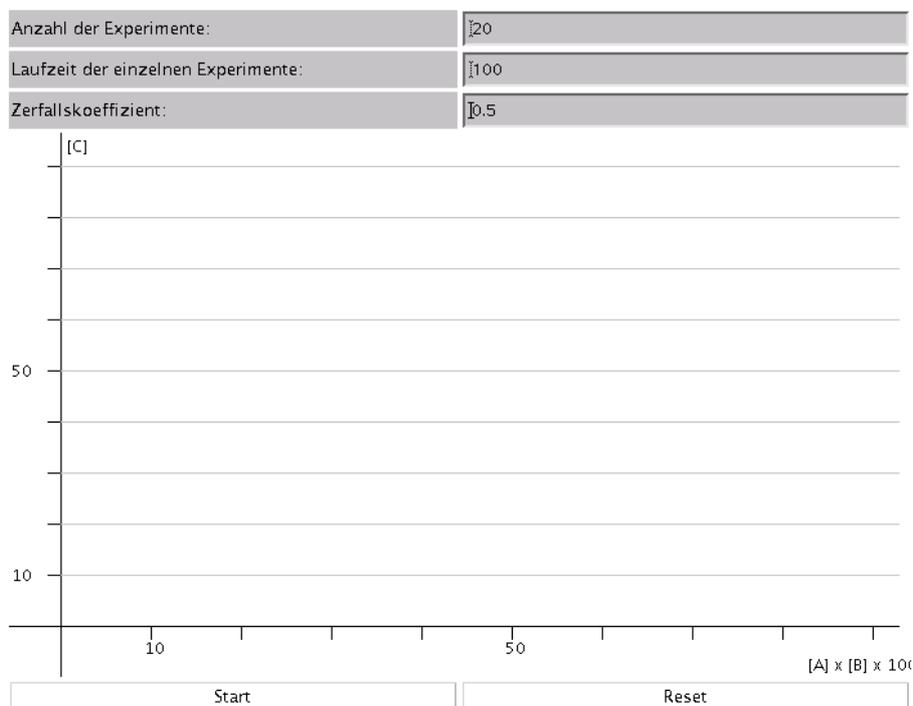


Abbildung 3.18: Screenshot der Arbeitsumgebung des MWG-Tools

Im MWG-Tool wird intern auf einem größeren Feld mit 900 Kästchen experimentiert. In jedem Experiment wird die Konstellation der Anfangswerte von Stoff *A* und Stoff *B* zufällig bestimmt. Das bereits aus den ersten beiden Tools bekannte Experiment wird dann je nach vorgegebener Laufzeit durchgeführt, wobei die durchschnittliche Konzentration der beteiligten Stoffe im Gleichgewichtszustand ermittelt wird. Diese Gleichgewichtskonzentrationen werden dann im Koordinatensystem als Punkte dargestellt. Die Abszisse jedes Punktes wird dabei durch das Produkt der Gleichgewichtskonzentrationen der Stoffe *A* und *B* bestimmt, die Ordinate entspricht der Gleichgewichtskonzentration von Stoff *C*. Aus Gründen der besseren Darstellbarkeit sind die jeweiligen Werte mit Korrekturfaktoren gestreckt worden.

3.3.2 Analyse der Simulationsergebnisse

Bereits mit dem Basistool können erste Erkenntnisse gemacht werden. Es stellt sich in der Regel heraus, dass die Anzahlen der einzelnen Stoffe nach genügend langer Zeit relativ konstant bleiben und sich ein Gleichgewicht einstellt. Auf Teilchenebene ist hier der Mechanismus nachzuempfinden. Diese Entdeckungen werden durch das zweite Tool bestätigt. Die Abbildungen 3.19 bis 3.21 zeigen Ergebnisse aus diesem Tool mit unterschiedlichen Parameterwerten.

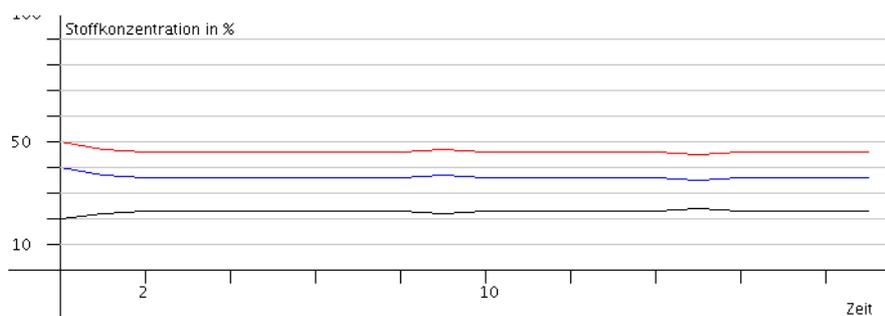


Abbildung 3.19: Entwicklung der Teilchenanzahlen mit folgenden Parameterwerten: $A_0 = 50$, $B_0 = 40$, $C_0 = 20$ und dem Zerfallskoeffizienten $z = 0.5$ (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

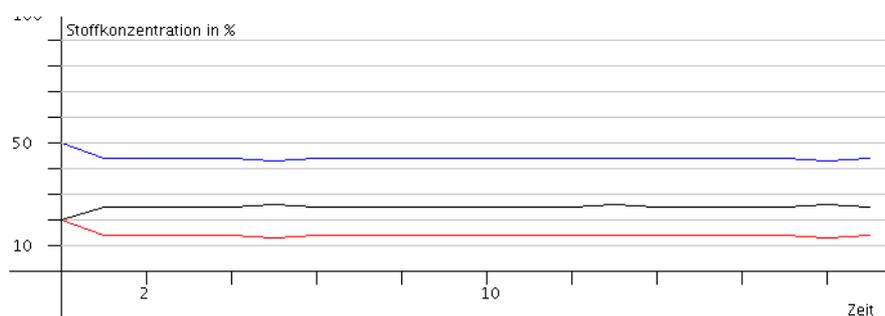


Abbildung 3.20: Entwicklung der Teilchenanzahlen mit $A_0 = 20$, $B_0 = 50$, $C_0 = 20$ und $z = 0.2$ (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

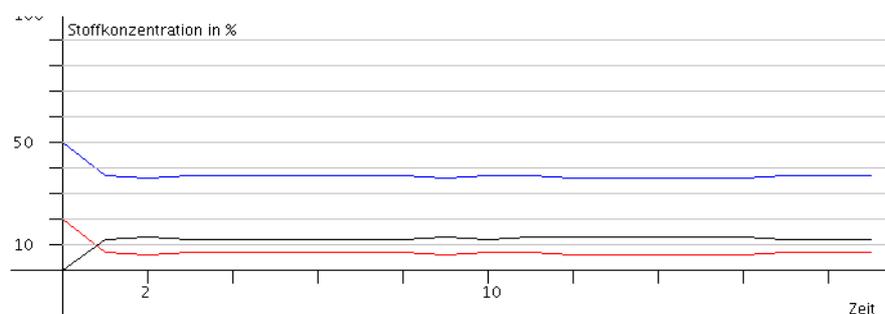


Abbildung 3.21: Entwicklung der Teilchenanzahlen mit $A_0 = 20$, $B_0 = 50$, $C_0 = 0$ und $z = 0.2$ (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

Neben dem sich einstellenden Gleichgewicht sind die unten angegebenen Quotienten interessant. In der Regel wird das Gleichgewicht sehr schnell erreicht, so dass die Konzentrationen in den letzten 20% der Zeitschritte nicht mehr stark schwanken. Von diesen letzten 20% der Simulationsergebnisse wird für jeden Stoff das Mittel gebildet und der Quotient aus der Konzentration von Stoff C und dem Produkt der Stoffkonzentrationen von A und B ermittelt. Es ist zu beobachten, dass sich der Quotient bei festem Zerfallskoeffizient und Variation der Anfangskonzentrationen nur unwesentlich verändert. Die Abbildungen 3.22 bis 3.24 zeigen dieses Phänomen für drei verschiedene Startwerte. Ähnlich wie bei den Simulationstools zu den Konkurrenzmodellen sind hier auch stochastische Effekte für Abweichungen verantwortlich.²¹

²¹vgl. Abschnitt 2.4.4

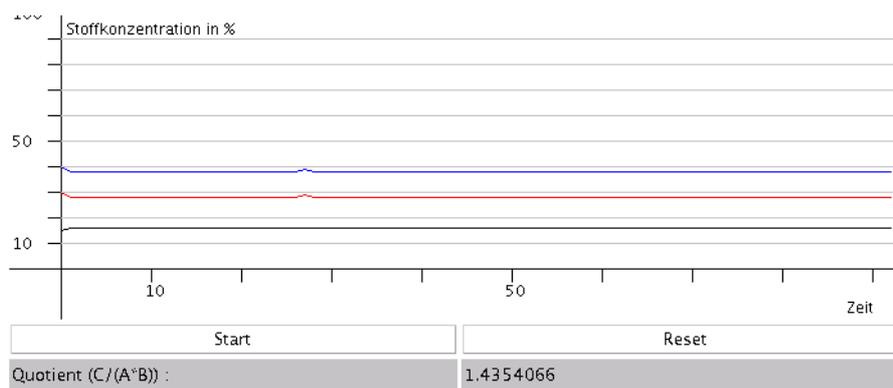


Abbildung 3.22: Entwicklung der Teilchenanzahlen mit folgenden Parameterwerten: $A_0 = 30$, $B_0 = 40$, $C_0 = 15$ und dem Zerfallskoeffizienten $z = 0.5$ (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

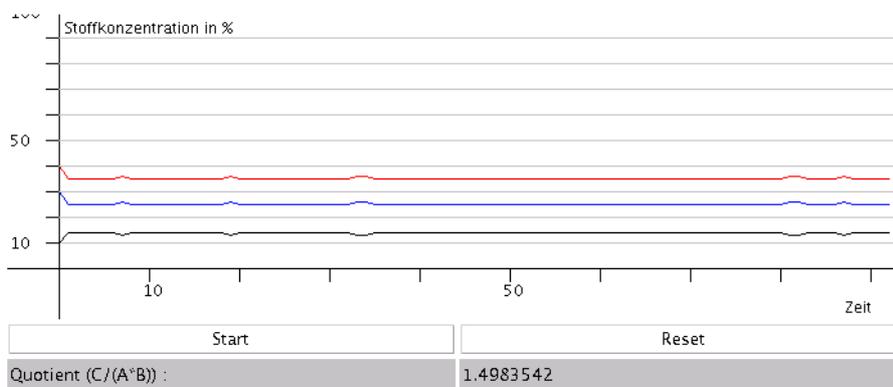


Abbildung 3.23: Entwicklung der Teilchenanzahlen mit $A_0 = 40$, $B_0 = 30$, $C_0 = 10$ und $z = 0.5$ (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

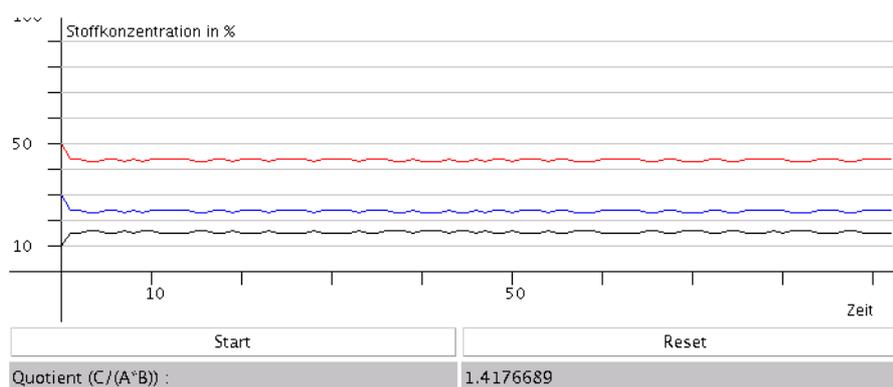


Abbildung 3.24: Entwicklung der Teilchenanzahlen mit $A_0 = 50$, $B_0 = 30$, $C_0 = 10$ und $z = 0.5$ (Stoff A: rot, Stoff B: blau, Stoff C: schwarz)

Diese Konstanz des Quotienten führt schließlich zum dritten Tool. Bevor eine Analyse von dessen Ergebnissen erfolgt, soll ein kurzer Exkurs eine Variante vorstellen, wie an dieser Stelle weiter vorgegangen werden könnte.

Exkurs: Eine Variante parallel zur Reproduktion

Bei den Tools zu den Konkurrenzmodellen war nach den langfristigen Simulationen eine Simulation zur Untersuchung und Bestimmung einer Reproduktionsfunktion notwendig. Im Gegensatz zu der hier vorliegenden Situation waren die Ergebnisse dort nicht geeignet, weitergehende mathematische Analysen zu betreiben. Dennoch soll hier aus Gründen der Vollständigkeit analog zur Vorgehensweise bei den Konkurrenzmodellen untersucht werden, wie die Anzahl der Reaktionen in einem Zeitschritt von der Anzahl der Teilchen der Edukte abhängt. Eine entsprechende computergestützte Simulationsumgebung steht derzeit nicht zur Verfügung. Jedoch kann mit Hilfe des Basistools eine statistische Erhebung gemacht werden, indem für unterschiedliche Kombinationen von Mengen der Eduktteilchen jeweils nur ein Reaktionsschritt simuliert wird und die Anzahl der jeweils neu entstandenen C -Teilchen ermittelt wird. Die Begriffe Konzentration und Teilchenanzahl werden im folgenden synonym benutzt, da beides auf einem festem Rauminhalt betrachtet wird.

Es wird nun vorausgesetzt, dass ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Anzahl der Eduktteilchen und der mittleren Anzahl der neu gebildeten Produktteilchen besteht. Diese Funktion sei mit $R(A_t, B_t)$ bezeichnet. Wird ferner angenommen, dass der Zerfall der C -Teilchen mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit z erfolgt, kann die mittlere Anzahl an Zerfallsreaktionen bei Stoff C zum Zeitpunkt t durch $z \cdot C_t$ angegeben werden. Es kann daher folgendes System von Iterationsvorschriften, bzw. Differenzgleichungen, aufgestellt werden, mit dem die Anzahlen der jeweiligen Teilchen (A_t, B_t und C_t) zum Zeitpunkt $t + 1$ beschrieben werden können, sofern sie zum Zeitpunkt t bekannt sind.

$$A_{t+1} = A_t - R(A_t, B_t) + z \cdot C_t \quad (3.22)$$

$$B_{t+1} = B_t - R(A_t, B_t) + z \cdot C_t \quad (3.23)$$

$$C_{t+1} = C_t + R(A_t, B_t) - z \cdot C_t \quad (3.24)$$

Wird dem Produkt der entsprechenden Eduktkonzentrationen aus der Erhebung die Anzahl der neuen C -Teilchen zugeordnet, ergibt sich folgende Grafik.

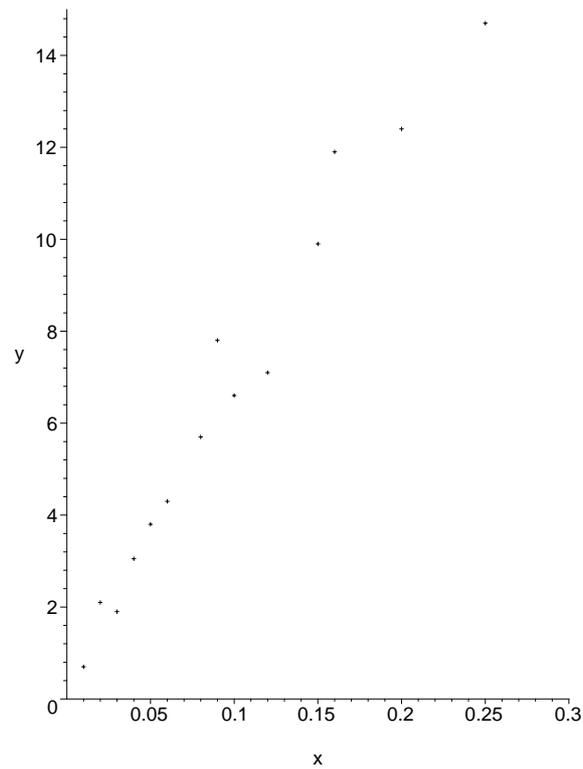


Abbildung 3.25: Abbildung $[A][B] \rightarrow$ Anzahl der neuen C -Teilchen

Mit Hilfe einer Tabellenkalkulation lässt sich der erkennbare lineare Zusammenhang durch eine Regressionsgeraden verdeutlichen:

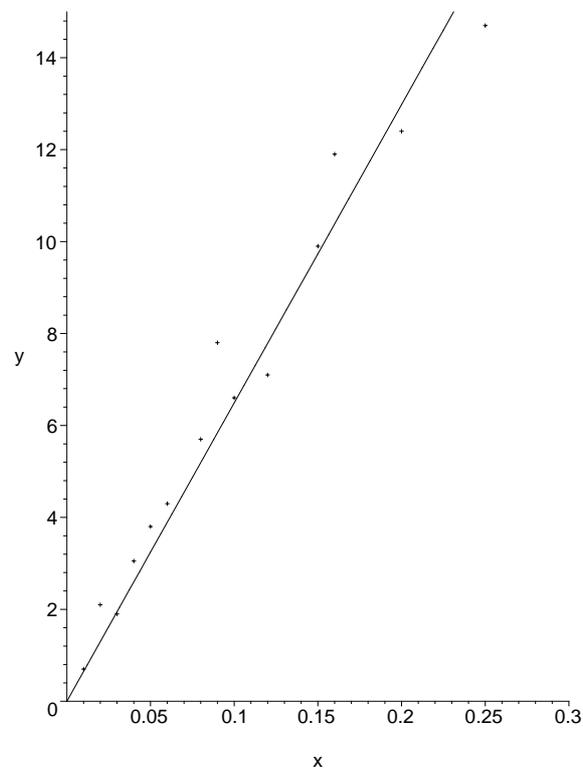


Abbildung 3.26: Abbildung $[A][B] \rightarrow$ Anzahl der neuen C -Teilchen mit Regressionsgeraden

Der proportionale Zusammenhang zwischen der Anzahl der neuen C -Teilchen und dem

Produkt der Konzentrationen resp. Anzahlen der Eduktteilchen ist somit experimentell nachvollziehbar. Die Funktion R kann demnach auf folgende Weise definiert werden:

$$R(A_t, B_t) = c \cdot A_t \cdot B_t \quad (3.25)$$

In Abbildung 3.27 wird dargestellt, wie der Verlauf von Konzentrationen der Reaktanden mit dem nun konkreten Iterationsmodell beschrieben wird.

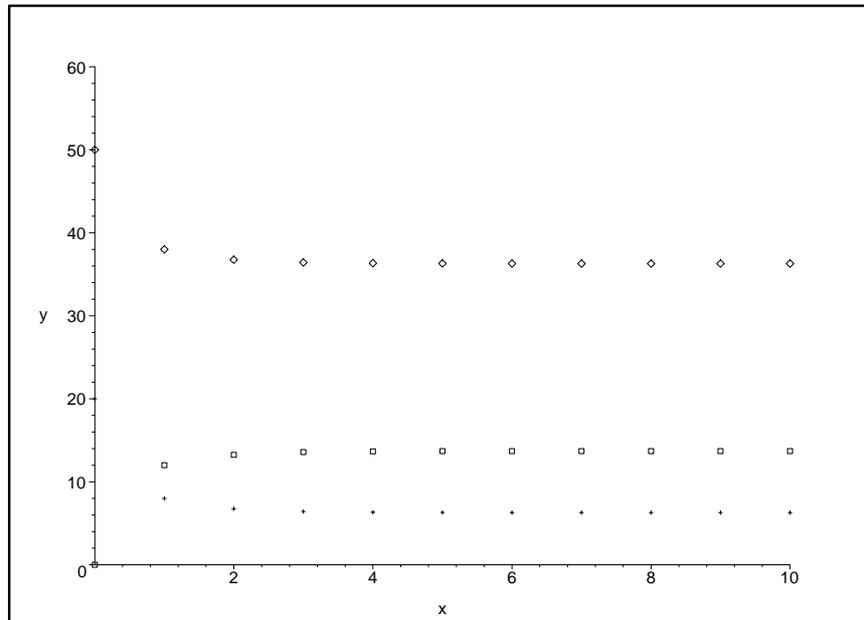


Abbildung 3.27: Auswertung des Iterationsmodells mit $A_0 = 20(+)$, $B_0 = 50(\diamond)$, $C_0 = 0(\square)$, $c = 0,006$ und $z = 0,1$

Das hier dargestellte Modell entspricht dem Verlauf der Konzentrationen der Reaktanden bei einer Gleichgewichtsreaktion der bekannten Form. Eine Darstellung der Iterationsvorschriften in Form von Differenzgleichungen entspricht den Gleichungen (3.22) bis (3.24). Die Differenzen auf den linken Seiten dieser Gleichungen geben die Änderungen der Teilchenanzahlen beim Schritt von t nach $t+1$ an. Im Gleichgewichtszustand ist diese Änderung gleich 0. Daher kann weiter gefolgert werden:

$$-R(A_t, B_t) + z \cdot C_t = 0 \quad (3.26)$$

$$\Leftrightarrow zC_t = c \cdot A_t B_t \quad (3.27)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_t}{A_t B_t} = \frac{c}{z} \quad (3.28)$$

Die Zusammenfassung der Konstanten zu einer Konstanten K und der Übergang von den Teilchenzahlen zu den jeweiligen Konzentrationen ($[A]$, $[B]$, $[C]$) liefert das Massenwirkungsgesetz für Reaktionen im Gleichgewichtszustand:

$$\frac{[C]}{[A][B]} = K \quad (3.29)$$

Hiermit endet der Exkurs.

Die Analyse des MWG-Tools zeigt den Zusammenhang zwischen dem Produkt der Konzentrationen der Edukte und der Konzentration des Produktes im Gleichgewichtszustand, wie das Beispiel in Abbildung 3.28 zeigt.

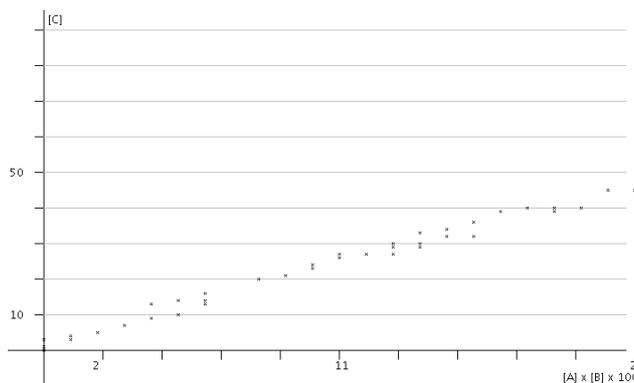


Abbildung 3.28: Ergebnis aus dem MWG-Tool von 50 Experimenten über 100 Zeitschritte mit dem Zerfallskoeffizient 0,3

Auch hier ist der lineare Zusammenhang erkennbar. Werden die Werte in eine Tabellenkalkulation exportiert, so kann dort ebenfalls eine lineare Regression durchgeführt werden. Die Regressionsgerade muss durch den Ursprung verlaufen. Für die Konzentrationen der Reaktanden im Gleichgewichtszustand lässt sich aufgrund dieser Überlegung und der Ergebnisse aus dem Tool folgende Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned} [C] &= K \cdot [A][B] \\ \Leftrightarrow \frac{[C]}{[A][B]} &= K \end{aligned} \quad (3.30)$$

Somit ist das Massenwirkungsgesetz für chemische Reaktionen der vorgenannten Form im Gleichgewicht aus den Simulationen ableitbar.

3.3.3 Unterrichtliche Umsetzung

Die Vorgaben durch die Richtlinien insbesondere bezüglich der Bedeutung von Modellierung und Modellbildung im Mathematikunterricht wurden bereits in Kapitel 2.4.2 ausführlich beschrieben. Hier sollen nur Leitgedanken zur Nutzung der Simulationstools vorgestellt werden.

Grundsätzlich ist die Arbeit mit den Tools wiederum in den Sekundarstufen I und II möglich. Die Analyse der Ergebnisse - sowohl mit als auch ohne den dargestellten Exkurs - stellt die Schüler allerdings auf mathematisch-technischer Ebene nicht vor zu große Probleme. Die Erstellung mathematischer Modelle auf der Basis des Konzeptmodells ohne Nutzung der Simulationstools ist dagegen weniger trivial und dürfte für eine interessante und anspruchsvolle Unterrichtsreihe in Grund- und vor allem Leistungskursen der Oberstufe geeignet sein. Eine detaillierte Ausarbeitung einer solchen Reihe soll allerdings an dieser Stelle nicht erfolgen.

Neben dem Einsatz im Mathematikunterricht ist die Nutzung der Simulationstools in fächerübergreifenden Unterrichtsphasen zwischen Mathematik und Chemie, aber auch in der Chemie alleine denkbar. Die Behandlung von Reaktionsgeschwindigkeit und Massenwirkungsgesetz in der Jahrgangsstufe 11 bietet hier sicherlich Gelegenheit die Simulationstools zu nutzen.

Im Folgenden werden zu den einzelnen Tools grundlegende Überlegungen zum Einsatz im Unterricht vorgestellt.

Nutzung des Basistools

Die Simulation zum Modell auf dieser untersten Darstellungsebene eröffnet die Möglichkeit, das Modell auf elementare Weise zu erfahren und zu begreifen. Dies wird auf der ersten Darstellungsebene des Modells in Form des Kästchenmodells erreicht. Die - virtuell angenommene - Verteilung der einzelnen Stoffteilchen wird durch farbige Punkte auf einem „Spielbrett“ symbolisiert, was den konkreten Ablauf einer Reaktion auch für jüngere Schüler deutlich macht. Es ist an dieser Stelle festzuhalten, dass hier eine Reaktion oder viel mehr die Metapher einer Reaktion mit zwei Edukten und einem Produkt visualisiert wird. Diese Darstellung erfolgt in den bislang benutzten Modellen zur Herleitung des Massenwirkungsgesetzes nicht. Sowohl der Stechheberversuch als auch der Holzapfelkrieg verdeutlichen eher dynamisches Gleichgewicht für Transportphänomene und weniger Vorgänge, bei denen Stoffe miteinander reagieren.

Insbesondere ist das Erreichen eines Gleichgewichtszustandes mit dieser Simulation direkt erfahrbar. Die Werte im oberhalb angeordneten Ausgabebereich schwanken in der Regel nach genügend langer Zeit nur noch geringfügig. Die abstrakte Vorstellung, dass eine Reaktion weiter stattfindet, obwohl sich die beteiligten Stoffe in einem Gleichgewichtszustand befinden, ist für jüngere Schüler sehr kompliziert. Hier kann den Schülern nahezu auf Teilchenebene der konkrete Vorgang in der Reaktion verdeutlicht werden. In diesem Zusammenhang muss im Unterricht allerdings stets darauf hingewiesen werden, dass die vorliegende Modellierung nur auf einer Metapher der Realität beruht. Die hier in diskreten Zeitschritten simulierten Elementarreaktionen beispielsweise finden in der Realität kontinuierlich statt. Mit Schülern der Sekundarstufe I ist dieses Diskretisierungsproblem sicherlich nicht zu besprechen. In Oberstufenkursen sollte es allerdings im Rahmen von Modellbewertungen angesprochen werden. Der Vergleich zu anderen Modellierungen, in denen zunächst auf diskreter Ebene diskutiert wurde, sollte dabei gezogen werden.

Wie im Exkurs dargestellt, kann mit Hilfe des Basistools untersucht werden, wie sich die Anzahl der Eduktteilchen (resp. deren Konzentrationen) auf die mittlere Anzahl der Reaktionen im Kästchenmodell auswirkt. Eine solche Analyse führt, wie bereits beschrieben, zu einem Iterationsmodell, dessen Analyse im Gleichgewichtszustand letztlich das Massenwirkungsgesetz für chemische Reaktionen im Gleichgewichtszustand liefert.

Nachdem der - wenn auch nur schematisch dargestellte - Ablauf der Reaktion konkret in diskreten Zeitschritten von den Schülern beobachtet werden konnte, ist es sinnvoll, die zeitliche Entwicklung der einzelnen Stoffkonzentrationen bzw. die Anzahl der einzelnen Stoffteilchen im zeitlichen Verlauf zu beobachten. Das hier vorgestellte Tool liefert dazu nur beschränkte Möglichkeiten. Das zweite Tool stellt hingegen diese Entwicklung in einem entsprechenden Diagramm dar.

Nutzung des Gleichgewichtstools

Während im ersten Tool die Reaktion auf Teilchenebene und in diskreten Zeitschritten beobachtet werden konnte, wird mit diesem Tool der zeitliche Verlauf deutlich gemacht. Die Vermutung aus dem Basistool, dass die weiter ablaufende Reaktion ab einem bestimmten Zeitpunkt höchstens minimale Auswirkungen auf die jeweiligen Stoffkonzentrationen hat, wird hier anhand des dargestellten Diagramms bestätigt.

Neben dieser Bestätigung führt die Arbeit mit diesem Tool zu weiteren Fragen. Bei unterschiedlichen Startwerten werden unterschiedliche Gleichgewichtssituationen erreicht. Es stellt sich beispielsweise die Frage, ob diese Gleichgewichtszustände bestimmten Regelmäßigkeiten unterworfen sind und inwieweit die festgesetzten Parameter dabei eine Rolle spielen. Hier tritt der Zerfallskoeffizient in den Fokus der Beobachtung. Seine Rolle

kann nun genauer untersucht werden. Das Ziel der Untersuchung, das Massenwirkungsgesetz, ist dem Lehrer bereits bekannt. Die Entdeckung des Massenwirkungsgesetzes beruht historisch gesehen auf der Auswertung von sehr vielen experimentell ermittelter Daten. Diese bedeutsame aber auch schwierige Entdeckung ist für Schüler natürlich nicht innerhalb von zwei bis drei Unterrichtsstunden in gleicher Weise nachzuentdecken. Ohne entsprechende Unterstützung durch den Lehrer könnten sich die Schüler in diversen Richtungen bei der weiteren Vorgehensweise regelrecht „verlaufen“. Eine gezielte Lenkung erscheint demzufolge an dieser Stelle ratsam. Insbesondere könnte durch den Lehrer auf die Konzentrationen im Gleichgewichtszustand hingewiesen und diese miteinander ins Verhältnis gesetzt werden. Es ist sicherlich für die Schüler einsichtig, dass dabei die Konzentrationen der Edukte der Konzentration des Produktes gegenüber gestellt werden müssen. Durch entsprechend gewählte Simulationen ist diese Einsicht zu unterstützen. Beispielsweise könnte die Konzentration des Stoffes C in Abhängigkeit der Konzentrationen der Stoffe A und B abgetragen werden. Die Kombination der Edukte sollte dabei durch das Produkt der jeweiligen Stoffkonzentrationen erreicht werden. Das dritte und letzte Tool bietet die Möglichkeit, diese Zusammenhänge grafisch darzustellen.

Nutzung des MWG-Tools

Nachdem durch das zweite Tool verdeutlicht wurde, dass die Konzentrationen im Gleichgewichtszustand in einer bestimmten Relation stehen und auch der Quotient aus dem Produkt der Gleichgewichtskonzentrationen von A und B sowie der Gleichgewichtskonzentration von C eingeführt wurde, liefert dieses Tool die Möglichkeit, verschiedene Gleichgewichtskonzentrationen miteinander in Beziehung zu setzen und diese Beziehung grafisch zu verdeutlichen. Es stellt sich heraus, dass es einen linearen Zusammenhang geben muss. Durch Variation des Zerfallskoeffizienten wird die Steigung der durch die Punktwolke angedeuteten Geraden verändert. Die einzelnen Werte lassen sich in ein Tabellenkalkulationsprogramm wie beispielsweise MS EXCEL zur weiteren Analyse importieren. Dort können die Werte genauer untersucht werden und es kann mit Hilfe entsprechender Werkzeuge eine funktionale Beschreibung des Zusammenhangs ermittelt werden. Es wird sich herausstellen, dass sich die Konzentration des Stoffes C in Abhängigkeit zum Produkt der Edukt-Konzentrationen als lineare Funktion beschreiben lässt. Wie bereits in der Analyse der Simulationsergebnisse beschrieben, kann so das Massenwirkungsgesetz für chemische Reaktionen im Gleichgewichtszustand hergeleitet werden.

3.4 Mathematische Ansätze ohne Simulationen

Während bei den Konkurrenzmodellen die Analyse der Simulationsergebnisse im Vordergrund steht und die rein mathematischen Ansätze im kombinatorischen Bereich keine praktikablen Lösungen liefern, ist es im Bereich der chemischen Reaktionen lohnenswert, mathematische Ansätze zu untersuchen, die sich lediglich auf das Konzeptmodell beziehen und die Simulationen nicht berücksichtigen. Entsprechend dem Konzeptmodell ist das Zustandekommen einer Reaktion auf Teilchenebene abhängig davon, ob in einem Kästchen mindestens ein Teilchen jedes Eduktes bei der Verteilung gelandet ist.

Zunächst wird dazu lediglich die Verteilung eines Stoffes (hier A) genauer betrachtet. Mit Hilfe der Kombinatorik kann untersucht werden, wie groß die mittlere Anzahl der Kästchen ist, die mit Teilchen besetzt sind. Ausgehend von der grundlegenden Formel zur Bestimmung dieser Anzahl werden Grenzwertbetrachtungen angestellt. Allgemein werden Reaktionen betrachtet, bei denen die Konzentrationen der Reaktanden sehr gering

sind. Hierbei steht a für die Anzahl der Teilchen der Substanz A und N für die Anzahl der Kästchen. Bereits intuitiv ist nachvollziehbar, dass bei sehr geringen Konzentrationen von Stoff A zu erwarten ist, dass jedes Teilchen in einem separaten Kästchen landet, die Anzahl der besetzten Kästchen demnach im Mittel nahe bei a ist. Es werden Erklärungen, aber auch Nachweise für diese Behauptung auf unterschiedlichen Ebenen dargestellt. Schließlich wird das Massenwirkungsgesetz für Reaktionen im Gleichgewichtszustand aufgrund der eben genannten Feststellung hergeleitet. Zu Beginn werden die notwendigen Grundlagen der Kombinatorik zusammenfassend dargestellt.

3.4.1 Kombinatorik: Grundlagen

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Kunst des richtigen Zählens. Es geht in den grundlegenden Fragestellungen stets darum, wieviele Möglichkeiten es für ein bestimmtes Ereignis gibt. Ausgangs- und Basismodell dieser Überlegungen ist das sogenannte Urnenmodell, das wiederum in vier unterschiedliche Modelle unterteilt werden kann. Zunächst werden diese vier Urnenmodelle vorgestellt, woran sich die Vorstellung einer Erweiterung der Modelle auf ein Verteilungsproblem, das Kugel-Fächer-Modell, anschließt. Die Herleitungen der Formeln sind hier relativ kurz gehalten; genauere Ausführungen können bei Krengel ([18]) nachgelesen werden. Schließlich wird eine Verknüpfung zwischen den kombinatorischen Grundlagen und der Problematik im Kästchenmodell zu den chemischen Reaktionen geschaffen.²²

Urnenmodelle

Es wird eine Urne betrachtet, in der n unterscheidbare Kugeln liegen. Es werden k Ziehungen durchgeführt, wobei bei jeder Ziehung genau eine Kugel aus der Urne gezogen und das Ziehungsergebnis notiert wird. Nach den Ziehungen wird das Gesamtergebnis betrachtet. Sowohl bei den Ziehungen als auch bei der Notierung der Ergebnisse werden jeweils zwei Fälle unterschieden. Die gezogene Kugel kann nach der Ziehung wieder in die Urne gelegt werden (Ziehen mit Wiederholung) oder zur Seite gelegt werden, wo sie dann für zukünftige Ziehungen nicht mehr zur Verfügung steht (Ziehen ohne Wiederholung). Bei der Notierung der Ergebnisse kann entweder die Reihenfolge beachtet werden (Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge) oder ähnlich wie bei einer „Strichliste“ die Reihenfolge irrelevant sein (Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge). Im Folgenden werden die vier unterschiedlichen Kombinationen genauer betrachtet.

Ziehen ohne Wiederholung und mit Beachtung der Reihenfolge

Werden aus einer Urne mit insgesamt n Kugeln k Kugeln so gezogen, dass die gezogenen Kugeln nicht wieder in die Urne zurück gelgt werden und die gezogene Reihenfolge beachtet wird, so ist die Anzahl der Möglichen Ziehungen durch den folgenden Term bestimmt:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \quad (3.31)$$

Ziehen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge

Bei dieser Ziehungsvariante wird die Reihenfolge nicht beachtet, was dazu führt, dass der

²²Die hier vorgestellten Grundlagen sind ebenfalls Basis der Überlegungen in 2.5.

obige Term durch die Anzahl der Permutationen von k Kugeln geteilt werden muss. Somit ergibt sich für die Anzahl an Ziehungsmöglichkeiten in dieser Variante der folgende Term:

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \quad (3.32)$$

Ziehen mit Wiederholung und mit Beachtung der Reihenfolge

Werden die gezogenen Kugeln wieder zurück gelegt, so vergrößert sich die Anzahl der Ziehungsmöglichkeiten, da in jedem Zug wieder n Kugeln gezogen werden können. Insgesamt kann die Anzahl der Ziehungsergebnisse mit dem folgenden Term berechnet werden.

$$n^k \quad (3.33)$$

Ziehen mit Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge

Diese Variante entpuppt sich als etwas komplizierter, da es hier durchaus möglich ist, dass eine Kugel mehrfach gezogen wird. Das Problem lässt sich allerdings darauf zurückführen, wieviele Möglichkeiten es gibt, k Kugeln auf $(n+k-1)$ Plätze zu verteilen. Insgesamt ergibt sich für die Berechnung der Anzahl an Möglichkeiten für diese Ziehungsvariante folgender Term:

$$\binom{n+k-1}{k} \quad (3.34)$$

Verteilungsmodelle

Mit Hilfe des Urnenmodells kann auch die Problematik betrachtet werden, wie viele mögliche Verteilungen von k Kugeln auf n Fächer es gibt. Hierbei wird danach unterschieden, ob eine oder mehrere Kugeln in ein Fach untergebracht werden können und ob die Kugeln unterscheidbar sind und damit die Reihenfolge der Besetzungen der Fächer relevant ist oder nicht. Die daraus resultierenden vier Verteilungsvarianten können analog auf die oben besprochenen Ziehungsvarianten übertragen werden.

Verteilung mit Einfachbesetzung mit unterscheidbaren Kugeln

Anstatt die Kugeln auf die Fächer zu verteilen, kann auch aus den Fächern für jede Kugel ein Fach gezogen werden. Da die Fächer nur einfach besetzt werden können, steht ein bereits gezogenes Fach nicht mehr zur Verfügung. Das entspricht dem Ziehen ohne Wiederholung. Da die Kugeln unterscheidbar sind, ist es wichtig zu beachten, welche Kugel in das erste gezogene Fach gelegt wird, welche in das zweite kommt usw. Die Reihenfolge der gezogenen Fächer ist demnach zu beachten. Es gibt nach bekanntem Schema für diese Ziehungsvariante $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Entsprechend ergibt sich für dieses Verteilungsproblem der folgende Term:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \quad (3.35)$$

Verteilung mit Einfachbesetzung mit nicht unterscheidbaren Kugeln

Auch dieses Verteilungsproblem kann einer Ziehungsvariante zugeordnet werden. Da jedes Fach nur einfach besetzt werden darf, scheidet ein gezogenes Fach für die weiteren Belegungen aus, was der Ziehung ohne Wiederholung entspricht. Da die Kugeln nicht unterscheidbar sind, ist es egal, welcher Kugel das erste gezogene Fach zugeordnet wird. Die

gezogene Reihenfolge ist irrelevant. Für dieses Verteilungsproblem ergibt sich demnach folgender Term.

$$\binom{n}{k} \quad (3.36)$$

Verteilung mit Mehrfachbesetzung und mit unterscheidbaren Kugeln

Bei der Zuordnung der Fächer zu den Kugeln wird nun die Möglichkeit eingeräumt, einem Fach mehrere Kugeln zuzuordnen. Ein gezogenes Fach steht somit nach der Belegung weiter zur Verfügung. Das entspricht einer Ziehung mit Wiederholung. Da die Kugeln unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge der gezogenen Fächer zu beachten. Demnach ergibt sich für dieses Verteilungsproblem folgender Term:

$$n^k \quad (3.37)$$

Verteilung mit Mehrfachbesetzung mit nicht unterscheidbaren Kugeln

Aufgrund der Mehrfachbesetzung ist dieser Fall mit dem Ziehen mit Wiederholung vergleichbar. Da die Kugeln nicht unterscheidbar sind, ist die Reihenfolge der belegten Fächer nicht relevant, wodurch sich für dieses Verteilungsproblem folgender Term ergibt:

$$\binom{n+k-1}{k} \quad (3.38)$$

3.4.2 Bezug zum Kästchenmodell

Die Anzahl der mit Teilchen besetzten Kästchen bei der Verteilung der Stoffteilchen ist im Kästchenmodell von entscheidender Bedeutung. Es wird nun davon ausgegangen, dass a Teilchen von Stoff A auf N Kästchen verteilt werden sollen. Es ist nachvollziehbar, dass bei einer sehr geringen Anzahl von Teilchen und einer hohen Anzahl an Kästchen nahezu jedes Teilchen nach der Verteilung alleine in einem Kästchen liegt. Das bedeutet, dass bei einer Verteilung von a Teilchen damit zu rechnen ist, dass von den N Kästchen a Kästchen besetzt sind. Dies soll nun auf unterschiedliche Weisen bestätigt werden. Zuvor wird jedoch das Problem mit Hilfe der Kombinatorik mathematisiert. Wie bereits dargestellt, kann die Anzahl der Möglichkeiten a ununterscheidbare Teilchen auf N Kästchen zu verteilen, wobei Doppelbelegungen möglich sind, durch folgenden Term berechnet werden:

$$\binom{N+a-1}{a} \quad (3.39)$$

Soll die Verteilung derart sein, dass Doppelbelegungen nicht möglich sind, so wird die Anzahl dieser Verteilungsmöglichkeiten durch diesen Term gegeben:

$$\binom{N}{a} \quad (3.40)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Verteilung genau a Kästchen (notwendigerweise einfach) besetzt werden, beträgt somit:

$$\frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \quad (3.41)$$

3.4.3 Ein Plausibilitätsargument

Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass wiederum a Teilchen auf N Kästchen verteilt werden. Ferner wird a als fest angenommen und der Grenzfall $N \rightarrow \infty$ betrachtet, was als eine mögliche Beschreibung der Situation interpretiert wird, in der die Konzentration von Stoff A gegen 0 geht. Es wird gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Verteilung genau a Kästchen (also alle besetzten Kästchen einfach) besetzt werden im Grenzfall 1 ist.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} = 1 \quad (3.42)$$

Die Auflösung der Binomialkoeffizienten im Bruch ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} &= \frac{N! \cdot (N-1)! \cdot a!}{(N-a)! \cdot a! \cdot (N+a-1)!} \\ &= \frac{N! \cdot (N-1)!}{(N-a)! \cdot (N+a-1)!} \\ &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-a+1) \cdot (N-a)! \cdot (N-1)!}{(N-a)! \cdot (N+a-1)!} \\ &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-a+1) \cdot (N-1)!}{(N+a-1)!} \\ &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-a+1) \cdot (N-1)!}{(N+a-1) \cdot (N+a-2) \cdot \dots \cdot (N+1) \cdot (N) \cdot (N-1)!} \\ &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-a+1)}{(N+a-1) \cdot (N+a-2) \cdot \dots \cdot (N+1) \cdot (N)} \\ &= \frac{N-1}{N+1} \cdot \frac{N-2}{N+2} \cdot \frac{N-3}{N+3} \cdot \dots \cdot \frac{N-(a-1)}{N+(a-1)} \end{aligned}$$

Wird hier jeder Bruch mit N gekürzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} &= \frac{1 - \frac{1}{N}}{1 + \frac{1}{N}} \cdot \frac{1 - \frac{2}{N}}{1 + \frac{2}{N}} \cdot \frac{1 - \frac{3}{N}}{1 + \frac{3}{N}} \cdot \dots \cdot \frac{1 - \frac{a-1}{N}}{1 + \frac{a-1}{N}} \\ &= \prod_{\lambda=1}^{a-1} \frac{1 - \frac{\lambda}{N}}{1 + \frac{\lambda}{N}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Für jeden Faktor $\frac{1 - \frac{\lambda}{N}}{1 + \frac{\lambda}{N}}$ gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\lambda}{N}}{1 + \frac{\lambda}{N}} = \frac{1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{N}}{1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{N}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \quad (3.44)$$

Es gilt daher für den gesamten Grenzwert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\lambda=1}^{a-1} \frac{1 - \frac{\lambda}{N}}{1 + \frac{\lambda}{N}} = \prod_{\lambda=1}^{a-1} 1 = 1 \quad (3.45)$$

Somit ist für festes a im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau a Kästchen, also alle besetzten Kästchen einfach, besetzt werden, gleich 1. Für geringe Konzentrationen kann davon ausgegangen werden, dass im Mittel a Kästchen besetzt werden.

3.4.4 Der Zugang via Erwartungswert

Auch hier wird nach der Anzahl der mit A -Teilchen besetzten Kästchen gefragt, wobei die Anzahl der Teilchen als fest angenommen und der Grenzfall $N \rightarrow \infty$ betrachtet wird. Im Unterschied zum ersten Ansatz wird allerdings eine Zufallsgröße definiert und im Grenzfall untersucht. Es handelt sich daher hier um eine verbesserte Variante der Grenzwertbetrachtung.

Zunächst wird untersucht, wieviele Möglichkeiten bestehen, a Teilchen so auf N Kästchen zu verteilen, dass genau i Kästchen besetzt sind. Die Zufallsgröße zu dieser Fragestellung lautet:

$$X = \text{Anzahl der besetzten Kästchen}$$

Der Fall $X = 1$ beschreibt die Situation, dass sämtliche Teilchen in einem Kästchen gelandet sind. Dafür gibt es genau N Möglichkeiten. Der Fall $X = a$ beschreibt die Situation, in der jedes Teilchen in ein separates Kästchen gelandet ist. Die Anzahl der Möglichkeiten für diesen Fall beträgt $\binom{N}{a}$.

Der allgemeine Fall $X = i$ (mit $1 \leq i \leq a$), in dem genau i Kästchen besetzt werden, ist etwas komplizierter zu modellieren. Zunächst werden i Teilchen auf N Kästchen verteilt.²³ Dafür gibt es

$$\binom{N}{i} \tag{3.46}$$

Möglichkeiten.

Die übrigen $a - i$ Teilchen müssen nun auf diese i besetzten Kästchen verteilt werden. Die Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich aus (3.38):

$$\binom{(a - i + i - 1)}{(a - i)} = \binom{a - 1}{a - i} \tag{3.47}$$

Demnach kann die Anzahl der Möglichkeiten, diese a Moleküle so zu verteilen, dass genau i Kästchen besetzt sind, mit folgendem Term angegeben werden.

$$\binom{N}{i} \cdot \binom{a - 1}{a - i} \tag{3.48}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Verteilung genau i Kästchen besetzt werden entspricht somit:

$$P(X = i) = \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{a - 1}{a - i}}{\binom{N + a - 1}{a}} \tag{3.49}$$

Die folgende Summe beschreibt den Erwartungswert von X und gibt daher die mittlere Anzahl der besetzten Kästchen an.

$$S := \mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^a i \cdot \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{a - 1}{a - i}}{\binom{N + a - 1}{a}} \tag{3.50}$$

Der Summand für $i = a$ lautet:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{\binom{N}{a} \cdot \binom{a - 1}{a - a}}{\binom{N + a - 1}{a}} &= a \cdot \frac{(N - 1) \cdot (N - 2) \cdot \dots \cdot (N - (a - 1))}{(N + 1) \cdot (N + 2) \cdot \dots \cdot (N + (a - 1))} \\ &= a \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{a - 1}{N}\right)}{\left(1 + \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{a - 1}{N}\right)} \end{aligned}$$

²³vgl. Abschnitt 2.5.1

Bei festen a ergibt sich im Grenzfall $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} a \cdot \frac{\binom{N}{a} \cdot \binom{a-1}{a-a}}{\binom{N+a-1}{a}} &= a \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{a-1}{N}\right)}{\left(1 + \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{a-1}{N}\right)} \\ &= a \end{aligned} \quad (3.51)$$

Für $1 \leq i < a$ kann gezeigt werden, dass die jeweiligen Summanden den Grenzwert 0 haben.²⁴ Somit folgt, dass der Erwartungswert im Grenzfall den Wert a annimmt, die mittlere Zahl an besetzten Kästchen somit a beträgt.

3.4.5 Eine Verbesserung zur ersten Variante

In der ersten Variante wurde davon ausgegangen, dass die Anzahl der zu verteilenden Teilchen a fest bleibt und lediglich die Kästchenzahl N gegen Unendlich läuft. Nun soll untersucht werden, was geschieht, wenn die Konzentration von Stoff A gering bleibt, die Anzahl der A -Teilchen aber nicht notwendig beschränkt ist. Das bedeutet, dass die Anzahl der A -Teilchen nicht mehr als fest angenommen werden kann. Sämtliche Überlegungen zur ersten Variante sind bis zum Gesamtbruch in (3.43) übertragbar. Hier wird nun zunächst der Zähler näher untersucht.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{a-1}{N}\right) &= \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2 - a}{N} + R_{a,N} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Im Restglied $R_{a,N}$ sind diverse Summanden, mit den Potenzen N^2 bis $N^{(a-1)}$ im Nenner zu finden. Der erste Summand S_1 mit dem Nenner N^2 hat dabei folgendes Aussehen:

$$\frac{\sum_{j_1 \neq j_2} j_1 \cdot j_2}{N^2} \quad \text{mit} \quad j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, a-1\} \quad (3.53)$$

Eine Abschätzung ergibt:

$$\frac{\sum_{j_1 \neq j_2} j_1 \cdot j_2}{N^2} \leq \frac{(\sum j_1) \cdot (\sum j_2)}{N^2} = \left(\frac{a(a-1)}{2N}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{N}\right)^2 \quad (3.54)$$

Entsprechend können alle weiteren Summanden abgeschätzt werden, so dass für jeden Summanden S_i des Restgliedes gilt²⁵:

$$|S_i| < \left(\frac{a^2}{N}\right)^i \quad (3.55)$$

Für das Restglied ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} |R_{a,N}| &< \left(\frac{a^2}{N}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{N}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a^2}{N}\right)^\alpha \\ &= \frac{a^2}{N} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha-1} \left(\frac{a^2}{N}\right)^i \end{aligned} \quad (3.56)$$

²⁴vgl. Anhang A.1.1

²⁵vgl. Anhang A.1.2

Im Grenzfalle $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$ ergibt sich somit für das Restglied:

$$\lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} |R_{a,N}| = \lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{N} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha-1} \left(\frac{a^2}{N} \right)^i \right) \quad (3.57)$$

$$\leq \lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{N} \cdot \sum_{i=1}^{a-1} \left(\frac{a^2}{N} \right)^i \right) \quad (3.58)$$

$$\stackrel{0 \leq \frac{a^2}{N} \leq 1}{=} \lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{N} \cdot \left(\frac{a^2}{N} \right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{a^2}{N} \right)^{a-1}}{1 - \frac{a^2}{N}} \right) \quad (3.59)$$

$$\leq \lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} \left(\frac{a^2}{N} \cdot \frac{a^2}{N} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a^2}{N}} \right) \quad (3.60)$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot 1 \quad (3.61)$$

$$= 0 \quad (3.62)$$

Damit bleibt für den Zähler des Gesamtbruchs im Grenzfalle $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$:

$$\lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{a-1} \left(1 - \frac{i}{N} \right) = \lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} \left(1 - \frac{a^2 - a}{2N} + R_{a,N} \right) \quad (3.63)$$

$$= 1 - \lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} \frac{a^2}{2N} + 0 = 1 \quad (3.64)$$

Dies gilt, da aus $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$ auch $\frac{a}{N} \rightarrow 0$ folgt. Analog folgt für den Nenner des Gesamtbruchs aus (3.43) auf Seite 102, dass er im Grenzfalle $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$ den Wert 1 annimmt.

Im Grenzfalle $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$ kann daher davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der besetzten Kästchen gleich der Anzahl der verteilten Teilchen ist, also jedes Teilchen in einem separaten Kästchen gelandet ist.

3.4.6 Eine Verbesserung des Zugangs via Erwartungswert

Ausgangspunkt ist zunächst der Erwartungswert der Zufallsgröße X aus Abschnitt 3.4.4:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^a i \cdot \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{a-1}{a-i}}{\binom{N+a-1}{a}} \\ &= \sum_{i=0}^a i \cdot \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{a-1}{a-i}}{\binom{N+a-1}{a}} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Wie in Abschnitt 3.4.5 wird auch hier nicht mehr vorausgesetzt, dass a beschränkt ist. Es kann gezeigt werden, dass die einzelnen Summanden s_{a-k} von S folgendermaßen abgeschätzt werden können:²⁶

Zunächst folgt für $i = a$:

$$s_a = a \cdot \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \quad (3.66)$$

²⁶vgl. Anhang A.1.3

Nach den Ausführungen in Abschnitt 3.4.3 kann der Bruch $\frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}}$ nach oben mit 1 abgeschätzt werden. Somit folgt:

$$s_a \leq a \quad \text{und} \quad \lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} s_a = a \quad (3.67)$$

Für die restlichen Summanden mit $i = a - k < a$ folgt:

$$s_{a-k} \leq a \cdot \left(\frac{a^2}{N}\right)^k \cdot \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \leq a \cdot \left(\frac{a^2}{N}\right)^k \quad (3.68)$$

Somit folgt für die restliche Summe:

$$\tilde{S} := \sum_{i=0}^{a-1} i \cdot \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{a-1}{a-i}}{\binom{N+a-1}{a}} \leq \sum_{i=0}^{a-1} a \cdot \left(\frac{a^2}{N}\right)^i \quad (3.69)$$

Da der Grenzfall $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$ betrachtet wird, also $\left|\frac{a^2}{N}\right| < 1$ gilt, kann S als geometrische Reihe aufgefasst werden. Somit gilt:

$$S = a \cdot \frac{1 - \left(\frac{a^2}{N}\right)^{a+1}}{1 - \left(\frac{a^2}{N}\right)} \quad (3.70)$$

Im Grenzfall $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$ folgt:²⁷

$$\lim_{\frac{a^2}{N} \rightarrow 0} S - a = a \cdot \frac{1 - 0^{a+1}}{1 - 0} - a = 0 \quad (3.71)$$

Im Grenzfall $\frac{a^2}{N} \rightarrow 0$ kann daher auch hier gezeigt werden, dass die Anzahl der besetzten Kästchen gleich der Anzahl der verteilten Teilchen ist, also jedes Teilchen in einem separaten Kästchen gelandet ist.

3.4.7 Zurück zur Reaktion

Wie gezeigt kann bei geringen Konzentrationen von Stoff A davon ausgegangen werden, dass bei der Verteilung von a Teilchen im Kästchenmodell die mittlere Anzahl der besetzten Kästchen a beträgt. Unabhängig von der Verteilung der A -Moleküle sind analog im Mittel b Kästchen mit Stoff B besetzt, falls b Moleküle verteilt wurden.²⁸ Der Anteil der mit A besetzten Kästchen ist somit $\frac{a}{N}$, der Anteil der mit B besetzten Kästchen ist $\frac{b}{N}$. Ein zufällig gewähltes Kästchen ist demnach mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{N}$ mit einem A -Molekül und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{b}{N}$ mit einem B -Molekül besetzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass es mit Molekülen beider Stoffe besetzt ist, ist demnach $\frac{a \cdot b}{N^2}$. Wird diese Wahrscheinlichkeit wieder als relative Häufigkeit besetzter Kästchen interpretiert, so ergibt sich, dass die Anzahl an Kästchen, die mit beiden Stoffen besetzt sind, durch folgenden Term angegeben werden kann:

$$\frac{a \cdot b}{N} \quad (3.72)$$

²⁷vgl. Anhang A.1.3

²⁸Auch bei Stoff B wird eine geringe Konzentration angenommen.

Die Anzahl der mit beiden Molekulararten mindestens einfach besetzten Kästchen ist im Grenzfall kleiner Konzentrationen somit $\frac{a \cdot b}{N}$.

Der Zerfall von Stoff C wird als zufällig mit konstanter Wahrscheinlichkeit z mit $0 < z < 1$ angenommen, so dass im Mittel pro Zeitschritt von c Teilchen $z \cdot c$ zerfallen. Es ergibt sich somit folgendes deterministische Modell zur Beschreibung des Bestands an Teilchen der jeweiligen Reaktanden:

$$a_{t_{i+1}} = a_{t_i} - \frac{1}{N} \cdot a_{t_i} b_{t_i} + z \cdot c_{t_i} \quad (3.73)$$

$$b_{t_{i+1}} = b_{t_i} - \frac{1}{N} \cdot a_{t_i} b_{t_i} + z \cdot c_{t_i} \quad (3.74)$$

$$c_{t_{i+1}} = c_{t_i} + \frac{1}{N} \cdot a_{t_i} b_{t_i} - z \cdot c_{t_i} \quad (3.75)$$

Werden die Anzahlen der Teilchen jeweils durch A_t , B_t und C_t beschrieben, so ergibt sich mit $c := \frac{1}{N}$ das gleiche System wie in den Gleichungen (3.22) bis (3.24).

3.4.8 Herleitung des Massenwirkungsgesetzes

Das Ergebnis aus den beiden vorhergehenden Abschnitten beschreibt den Bestand an Molekülen der beteiligten Stoffe bei einer Reaktion der bekannten Form:



Analog zu den Überlegungen im Exkurs auf den Seiten 93 bis 95 kann hier das Massenwirkungsgesetz hergeleitet werden, da im Gleichgewichtszustand die Änderung des Bestandes der jeweiligen Teilchen gleich 0 ist.

$$\begin{aligned} a_{t_{i+1}} - a_{t_i} &= 0 \\ \text{bzw. } b_{t_{i+1}} - b_{t_i} &= 0 \\ \text{und } c_{t_{i+1}} - c_{t_i} &= 0 \end{aligned}$$

Weiter folgt:

$$\Leftrightarrow c_{t_i} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{N} \cdot a_{t_i} b_{t_i}$$

Der Übergang zu den Stoffkonzentrationen liefert schließlich mit $K := \frac{1}{z}$:

$$\frac{[A][B]}{[C]} = K \quad (3.76)$$

Die letzte Zeile entspricht gerade der Darstellung des Massenwirkungsgesetzes für chemische Reaktionen im Gleichgewichtszustand.

Kapitel 4

Beobachtungen in der Praxis

Die Entwicklung von unterrichtsrelevanten Materialien kann nur dann erfolgreich sein, wenn die Materialien auch mit Schülern getestet werden. In diesem Kapitel werden einige Tests mit unterschiedlichen Schülergruppen und die jeweiligen Ergebnisse vorgestellt. Da die Tests mit sehr kleinen Gruppen durchgeführt wurden, können hier nur exemplarische Ergebnisse dargestellt werden. Wie die Beschreibung von Testgruppen und Testaufbau zeigen, entsprechen die Testbedingungen bei allen Gruppen nicht den normalen Bedingungen in einem Schulunterricht. Die Ergebnisse und Schlussfolgerungen basieren somit auf Fallbeispielen.

4.1 Zielsetzung

Die Anzahl der beobachteten Schüler bzw. Schülergruppen war zu gering, um empirisch gesicherte Aussagen zu treffen. Dennoch wurden einige Ziele verfolgt. Zunächst sollte getestet werden, wie die Schüler mit den Tools umgehen können, ob das Handling der Programme Probleme bereitet und die Aufteilung der Arbeitsoberfläche optimiert werden muss.

Ein weiteres Ziel war, heraus zu finden, was die Schüler durch den Umgang mit den Tools erfahren bzw. erarbeiten können. Sind die Simulationstools derart gestaltet, dass Schüler Entdeckungen machen können oder auch bei vorgegebenen Beobachtungsschwerpunkten bzw. Fragestellungen Lösungsansätze entwickeln können? Ferner sollte untersucht werden, ob Ideen von Modellierung bei den Schülern zu entdecken sind.

4.2 Beschreibung der Testbedingungen

Es wurde insgesamt mit drei unterschiedlichen Schülergruppen, unter teilweise verschiedenen Bedingungen gearbeitet. Mit allen Schülergruppen wurden Simulationstools zum Themenbereich Konkurrenzmodelle behandelt. Da in allen Gruppen nicht für jeden Schüler ein Computer zur Verfügung stand, haben sich jeweils kleinere Teilgruppen gebildet, die an einem Computer zusammen gearbeitet haben.

4.2.1 Gruppe 1: „Schülertage“

Die RWTH-Aachen veranstaltet in jedem Jahr sogenannte Schülertage, an denen sich interessierte Schülergruppen aus den benachbarten Gymnasien an den letzten drei Tagen

vor Schuljahresende mit mathematischen Problemstellungen beschäftigen. Während der Schülertage im Jahr 2005 wurde an zwei Tagen nachmittags mit Kleingruppen an den Simulationstools gearbeitet. Die Schülergruppe setzte sich aus mathematisch interessierten Leistungskursschülern beider Geschlechter der Jahrgangsstufe 12 zusammen.

Zu Beginn wurden den Schülern in einem Kurzvortrag grundlegende Informationen zu Konkurrenzverhalten und Populationswachstum mitgeteilt. Die Konkurrenzmodelle 1 und 2 wurden vorgestellt und mit realen Beispielen untermauert. Im Anschluss daran wurde das Basistool vorgestellt. In einer ersten Praxisphase erhielten die Schüler vorgefertigte Protokollformblätter, wodurch die generelle Vorgehensweise diktiert wurde.¹ Die Schüler sollten sich selber eine Fragestellung überlegen, die sie mit Hilfe des Basistools untersuchen wollten. Um unterschiedliche Simulationsergebnisse leichter notieren zu können, war ein Raster zur Anfertigung von Diagrammen im Protokollblatt vorgegeben. Beobachtungen sowie Folgerungen und neue Fragestellungen sollten in entsprechend vorbereiteten Kästchen festgehalten werden.

Nach der ersten Praxisphase wurden die Ergebnisse kurz zusammengefasst und das zweite Tool zur Darstellung einer zeitlichen Entwicklung vorgestellt. Die weiteren Untersuchungen sollten am Konkurrenzmodell 1 gemacht werden. In der zweiten Praxisphase wurde wiederum ein Protokollbogen vorgegeben, bei dem die strukturellen Vorgaben etwas allgemeiner waren.² In vier Protokollzeilen konnten vier unterschiedliche Fragestellungen, gewählte Parametereinstellungen sowie Beobachtungen und Folgerungen notiert werden. Auf einer zweiten Seite waren zur Unterstützung erneut Raster für Diagramme beigefügt. Da die Schüler bereits den gesamten Tag mit mathematischen Themen beschäftigt wurden, die den gängigen Schulstoff übersteigen, waren nach dieser zweiten Praxisphase Ermüdungserscheinungen festzustellen. Es wurde daher auf die weitergehende Arbeit mit dem letzten Tool zur Reproduktionsfunktion verzichtet.

4.2.2 Gruppe 2: „Schülersymposium“

Im Rahmen des zweiten Aachener Schülersymposiums zur angewandten Mathematik wurden die Simulationstools zu den Konkurrenzmodellen in einem dreistündigen Workshop behandelt. Die Zusammensetzung der Testgruppe war in diesem Fall heterogener. Grundsätzlich waren sämtliche Teilnehmer mathematisch interessiert und bisweilen auch sehr begabt. Die Altersstruktur war unterschiedlich, da einzelne Teilnehmer bereits im ersten Semester studierten, der Hauptteil der Gruppe besuchte jedoch die 12. Jahrgangsstufe eines Gymnasiums.

Ähnlich wie bei der ersten Gruppe wurde auch hier mit einem Kurzvortrag begonnen, in dem Grundlagen zu Konkurrenzphänomenen, die Konkurrenzmodelle 1 und 2 sowie die Handhabung des Basistools vermittelt wurden. Für die erste Praxisphase wurden wieder vorgefertigte Protokollbögen ausgeteilt, die prinzipiell dem Anfangsbogen der ersten Gruppe glichen.³ Im Gegensatz zu der ersten Gruppe wurde hier allerdings die Ausgangsfragestellung vorgegeben:

Fragestellung:

Vergleichen Sie die langfristige Entwicklung von KM1 und KM2 für ausgewählte Parameter. Dafür soll die Startgröße konstant gleich 1 gehalten werden und nur der Parameter q variiert werden, wobei q die Werte 1, 5 und 20 annehmen soll.

¹vgl. Anhang C.1

²vgl. Anhang C.1

³vgl. Anhang C.2

Beobachtungen sollen beschrieben werden und der qualitative Verlauf für die unterschiedlichen Parametereinstellungen skizziert werden.

Aus den Beobachtungen sind neue Fragestellungen zu entwickeln.

Im Anschluss an die Praxisphase wurden die jeweiligen Ergebnisse zusammengetragen. Das Tool zur Betrachtung der zeitlichen Entwicklung wurde erläutert und ein weiterer Protokollbogen wurde ausgeteilt.⁴ Auf diesem Bogen war wiederum ein klarer Arbeitsauftrag vorgegeben.

Fragestellung:

Die Beobachtungen und Thesen aus dem Kästchenmodell sind zu überprüfen und gegebenenfalls zu präzisieren.

In diesem Tool ist es möglich, Mittelwerte zu betrachten. Gibt es einen funktionalen Zusammenhang zwischen q und dem jeweiligen zeitlichen Mittelwert des Bestands bei fester Kästchenzahl? Bei einer Kästchenzahl von 100 ist es für die Variation von q empfehlenswert, Werte zwischen 3 und 11 zu wählen.

Erstellen Sie einen Plan zur Vorgehensweise und führen Sie diesen anschließend aus.

Erklären Sie Ihre gemachten Beobachtungen und halten Sie diese fest.

Die enge Aufgabenführung war ein Resultat aus den Erfahrungen mit der ersten Gruppe. Auch hier wurden nach der Praxisphase die unterschiedlichen Ergebnisse kurz besprochen und verglichen.

In der dritten Praxisphase sollte die Reproduktionsfunktion hergeleitet werden. Die Schüler waren allerdings in der zweiten Phase so engagiert, dass die Zeit für eine dritte Praxisphase nicht reichte. Die Herleitung einer Reproduktionsfunktion erfolgte dann in einem gemeinsamen Gespräch.

4.2.3 Gruppe 3: Eine Klasse 7

Mit einer Klasse 7 konnte ein Testlauf während einer Doppelstunde an einem Gymnasium durchgeführt werden, bei dem sich die Arbeit lediglich auf das Basistool beschränkte. Auch hier wurden die Schüler zunächst durch einen Kurzvortrag mit den Grundlagen zu Konkurrenzverhalten und dem Umgang mit dem Basistool vertraut gemacht. Zusätzlich erhielt jeder Schüler ein Informationsblatt mit den entsprechenden Basisinformationen.⁵ Der ausgeteilte Protokollbogen entsprach dem von Gruppe 1.⁶ Hinsichtlich der zu bearbeitenden Aufgabe wurde den Schülern in dieser Gruppe zunächst aufgetragen, mit dem entsprechenden Tool zu spielen und auf Auffälligkeiten zu achten. Erst wenn sie eine Entdeckung gemacht hatten, sollten sie gezielt diese Entdeckung untersuchen und eine entsprechende Fragestellung formulieren. Im Gegensatz zu den ersten beiden Gruppen war die Betreuung der Schüler in dieser Gruppe intensiver. Hier waren mehr Hilfen bzgl. der Programmbedienung aber auch hinsichtlich eines geplanten Vorgehens notwendig.

⁴vgl. Anhang C.2

⁵vgl. Anhang C.3

⁶vgl. Anhang C.1

4.3 Fallbeispiele

4.3.1 Gruppe 1

Basistool

Es wurden von den Schülern unterschiedliche Fragestellungen untersucht. Sehr häufig wurde nach dem Reproduktionsfaktor gefragt, bei dem im Konkurrenzmodell 1 (KM1) die Population ausstirbt. Hierbei konnten qualitative Feststellungen beobachtet werden. Stellvertretend für viele Gruppen sollen folgende Beobachtungen stehen:

Kleingruppe 1:

- bei $q=5$ und $q=10$ stirbt die Pflanze[npopulation] (wahrscheinlich) nie aus
- bei $q=14$ ist die Pflanze bei über 60% der Fälle sehr stabil
- bei $q=16$ sterben 50% der Pflanzen vor der 10. Generation aus (dies bestätigt sich bei 17 nicht: doofer Zufall)
- die Pflanzen sterben immer nach einer sehr hohen Startgeneration aus

Kleingruppe 2:

- bei $q=5$ und $q=10$ stirbt die Pflanze[npopulation] (wahrscheinlich) nie aus
- bei höher werdenden RF/q schwankt es zwischen der Anzahl von fast nur mehrfach und nicht bzw. einfach besetzten Zellen

Kleingruppe 3:

- bei $q=5$ und $q=10$ stirbt die Pflanze[npopulation] (wahrscheinlich) nie aus
- je größer q , desto weiter liegen die Populationsänderungen auseinander, die Population stirbt schneller aus

Besonders interessant war in dieser Gruppe folgendes Protokoll:⁷

„Wie wirkt sich die Verdopplung der jeweils vorigen Startgröße bei $q = \text{const.}$ auf die Anzahl der einfach besetzten Zellen nach 6 Generationen aus?“

Das Ergebnis der Untersuchung mit insgesamt 8 Testreihen lautet:

Es zeigt sich, dass die Startgröße entgegen der Erwartung für die Anzahl der einfach besetzten Zellen nach 6 Generationen nicht von großer Bedeutung zu sein scheint. Im Bereich zwischen 36 und 40 einfach besetzten Zellen sammeln sich die Ergebnisse der verschiedenen Startgrößen.

Folgerung:

Die Wahrscheinlichkeit für möglichst viele einfach besetzte Zellen steigt nicht mit einer größeren Startgröße.“

⁷vgl. Anhang C.4

Die Ergebnisse zeigen, dass die Schüler ernsthaft mit den Fragestellungen umgegangen sind. Die Folgerungen sind bisweilen noch nicht vollständig korrekt, was aber auf dieser Arbeitsstufe noch nicht verlangt werden kann. Grundsätzlich wurde festgestellt, dass bei steigender Reproduktion mit KM1 das Risiko des Aussterbens steigt. Die Erklärung dazu wurde in der anschließenden Diskussion von den Schülern geliefert, die bemerkten, dass bei einer sehr hohen Anzahl von Samen die Wahrscheinlichkeit für einfach besetzte Kästchen gegen 0 tendiert.

Das Generationstool

Die Fragestellungen, die mit diesem Tool untersucht wurden, variierten sehr stark. Manche Schüler wollten einen Zusammenhang zwischen der Startgröße und dem Reproduktionsfaktor untersuchen. Andere variierten den Reproduktionsfaktor und untersuchten den langfristigen Bestand, wieder andere beschäftigten sich mit Zyklen und versuchten Gesetzmäßigkeiten zu bestimmen. Schließlich wurde bei einer Kleingruppe die Bedeutung der Kästchenanzahl untersucht. Die Ergebnisse in den einzelnen Kleingruppen waren unterschiedlich erfolgreich. So konnte bei einer Kleingruppe festgestellt werden, dass bei kleinen Reproduktionsfaktoren der Bestand sich bei einem festen Wert einpegelt. Mit steigendem Reproduktionsfaktor nahm die Häufigkeit von Zyklen an und ab einer bestimmten Grenze war es nahezu sicher, dass die Population ausstirbt. Die Bedeutung der Kästchenanzahl wurde dahingehend geklärt, dass die Lebensdauer einer Population bei festem Reproduktionsfaktor mit steigender Kästchenzahl ebenfalls steigt. Vielfach waren Beobachtungen rein qualitativ, es gab keinerlei Aussagen bzw. Beobachtungen, auf denen weitere Vermutungen gestützt werden konnten. Ferner war auffällig, dass das eigentliche Ziel, die Beschreibung einer Population nicht mehr aufgegriffen wurde.

Es war insgesamt zu beobachten, dass die Leistung der Schüler in der zweiten Praxisphase deutlich abnahm, was aufgrund des bisherigen Tagesprogramms auch durchaus verständlich war.

4.3.2 Gruppe 2

1. Praxisphase

Es wurde festgestellt, dass bei Konkurrenzmodell 2 der Populationsbestand für $q = 5$ und $q = 20$ gegen 100 strebt, wobei dieser Wert für $q = 20$ schneller erreicht wird. Zum Konkurrenzmodell 1 wurde festgestellt, dass bei sich $q = 5$ die Populationsgröße bei einem festen Wert einpendelt. Für $q = 20$ wurde ermittelt, dass die Population in der Regel ausstirbt. Eine Kleingruppe versuchte einen Zusammenhang zwischen dem Reproduktionsfaktor und dem mittleren langfristigen Bestand zu untersuchen.

Die fest vorgeschriebene Fragestellung lieferte hier klarere Ergebnisse bei den Schülern.

4.3.3 2. Praxisphase

In dieser Phase konnte festgestellt werden, dass die Schüler sich nun mehr für das Thema interessierten als noch in der ersten Phase; das Interesse war geweckt. Die Arbeit mit dem Tool wurde intensiver, wobei sich interessanterweise sämtliche Kleingruppen nun mit der Frage beschäftigten, ob der durchschnittliche Bestand (bei kleineren Werten von q) vom Reproduktionsfaktor abhängig ist. Die Vorgehensweise dabei war in allen Kleingruppen

gleich. Die Schüler bestimmten die Durchschnittsbestände für unterschiedliche Reproduktionsfaktoren. Die Ergebnisse wurden in eine Tabellenkalkulation übertragen, wo mit Hilfe einer vom Programm angebotenen Regression ein funktionaler Zusammenhang ermittelt wurde. Die folgenden Bilder zeigen einige der dabei entstandenen Resultate.⁸

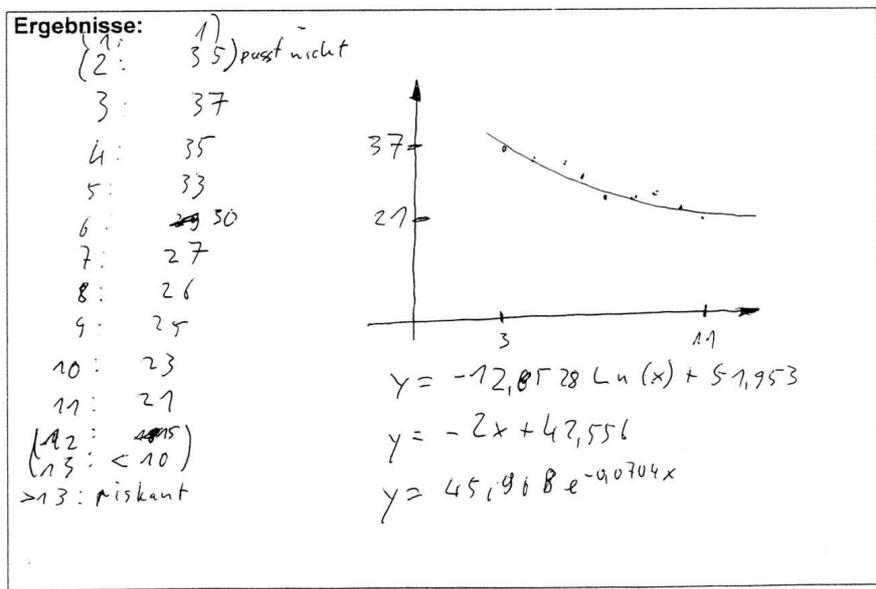


Abbildung 4.1: Ein Schülerergebnis in der zweiten Praxisphase bei Gruppe 2

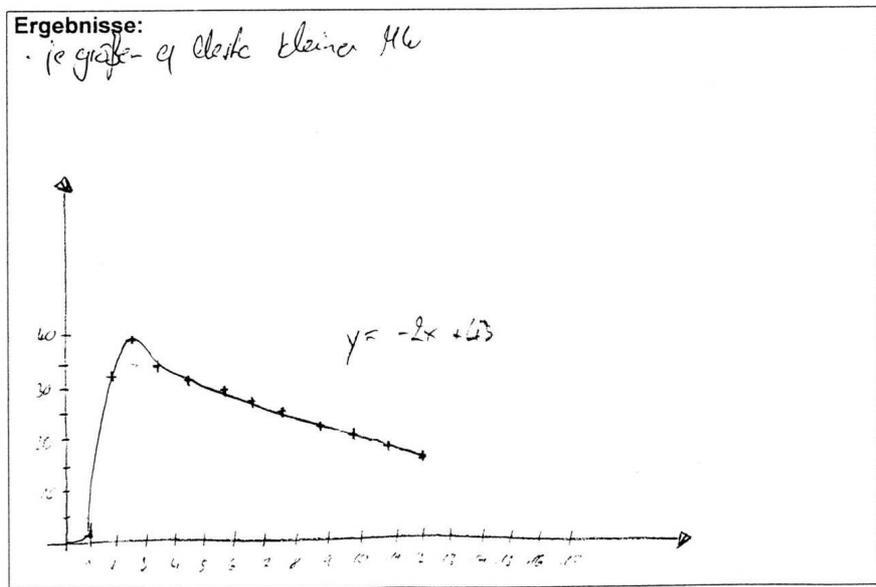


Abbildung 4.2: Ein weiteres Schülerergebnis in der zweiten Praxisphase bei Gruppe 2

⁸Da die Originalprotokolle bei den Schülern verblieben sind, handelt es sich hier lediglich um Bilder von Kopien.

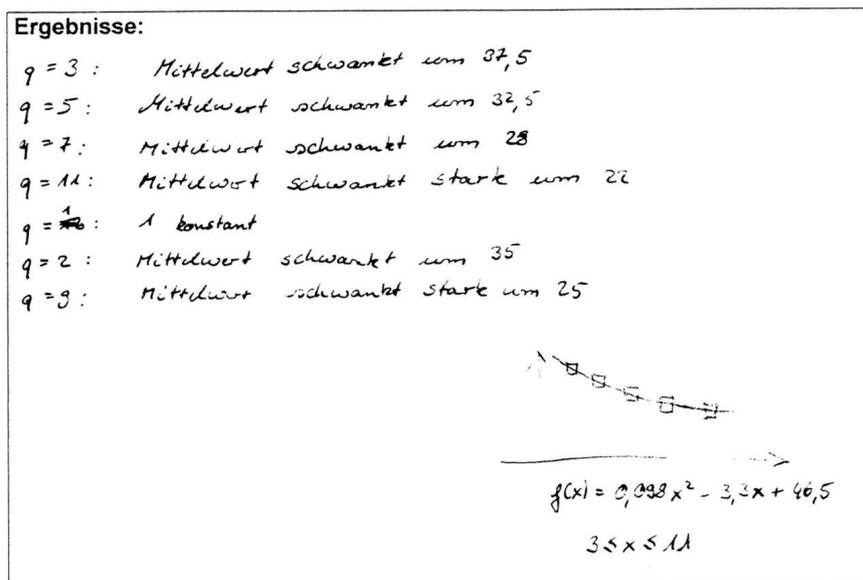


Abbildung 4.3: Ein drittes Schülerergebnis in der zweiten Praxisphase bei Gruppe 2

Diese Praxisphase wurde aufgrund der engagierten Arbeit der Schüler verlängert, so dass eine dritte Praxisphase mit dem dritten Tool nicht möglich war. In der anschließenden Diskussion wurde festgestellt, dass der untersuchte Zusammenhang nur für einen bestimmten Bereich von Reproduktionsfaktoren sinnvoll umgesetzt werden kann. Dies führte schließlich zum dritten Tool. Der allgemeine Verlauf der Reproduktionskurve war für die Schüler nachvollziehbar. Ebenso konnte in einem Gespräch erarbeitet werden, wie der Typ der Funktion durch schrittweise Transformationen ermittelt werden kann. Eine Bestimmung der Bedeutung der einzelnen Parameter in der Reproduktionsfunktion konnte aufgrund mangelnder Zeit nicht mehr erfolgen.

4.3.4 Gruppe 3

Die Arbeit mit den Schülern der 7. Klasse unterschied sich in vielerlei Hinsicht von den vorangegangenen Arbeitsphasen. Die Schüler brauchten hier eine wesentlich engere Führung bei der Entwicklung einer konkreten Fragestellung. Hierzu wurden unterschiedlichen Vorschläge gemacht. Die Beobachtungen beschreiben vielfach das Verhalten einer konkreten Population, wobei die jeweiligen Parameter zwar notiert wurden, die notierten Beobachtungen aber nicht den Parameterwerten zugeordnet wurden. Es wurde beschrieben, dass die Population nach einer bestimmten Anzahl an Generationen ausstirbt oder dass der Bestand schwankt. Einzelne Schüler protokollierten ihre Versuche dagegen sehr genau, wie das folgende Beispiel zeigt:

„Die Samenzahl steigt und sinkt immer wieder. Von Generation 16-23 tritt immer wieder jedesmal die Samenzahl 41 auf. Die Samenzahl erreicht nie 50. Ab Generation 7 sinkt die Samenanzahl nie unter 20. Öfters sind die gleichen Samenanzahlen zu sehen. (2-3, 14-15, 23-24, 30-31, 44-45, 53-56)“

Der hier zitierte Schüler beobachtete eine Population mit der Startgröße 1 und dem Reproduktionsfaktor $q = 2$ für KM1.

Einige Schüler untersuchten das Konkurrenzmodell 2 genauer und stellten dabei folgendes fest:

„Bei KM 2 kann es nie aussterben, weil immer so viele Samen überleben, wie Kästchen besetzt sind.“

Im Bezug auf die langfristige Entwicklung des Bestandes stellte ein Schüler, der mit $q = 2$ und der Startgröße 1 KM1 experimentierte, fest:

„Bei den ersten Generationen steigt die Anzahl der einfach besetzten Zellen stark steigend.

Auf lange Sicht gesehen pendelt es [sich] ca. zwischen 30-40 [...] ein.“

Generell ist zu bemerken, dass die Klasse sehr engagiert gearbeitet hat. Leider war es nicht möglich, die Ergebnisse in einer weiteren Stunde zu diskutieren.

4.4 Schlussfolgerungen

Die Arbeit mit den unterschiedlichen Schülergruppen hat gezeigt, dass die Tools durchaus dazu geeignet sind, den Modellbildungsprozess mit Schülern unterschiedlicher Altersstufen zu behandeln. Während bei den Jüngeren die Beschreibung im Vordergrund steht und Analysen nur qualitativ gemacht werden können, zeigt insbesondere die zweite Praxisphase in der zweiten Gruppe, dass die Ergebnisse der Simulationstools von älteren Schülern durchaus quantitativ ausgewertet werden.

In allen drei Testgruppen musste festgestellt werden, dass die veranschlagte Zeit nicht ausreichte. In der Klasse 7 hätten ein bis zwei weitere Stunden dazu führen können, dass die unterschiedlichen Ergebnisse besprochen, bewertet und begründet werden. In der zweiten Gruppe wäre eine intensive Nutzung des dritten Tools interessant geworden, da sich in dieser Gruppe zeigte, dass die Auswertung von experimentell ermittelten Daten auf großes Interesse stieß. In der ersten Gruppe waren die generellen Voraussetzungen vergleichsweise schlecht, da die Schüler bereits am Vormittag sehr viel Mathematik betrieben haben, die über das normale Schulniveau hinausgeht. Dementsprechend ließ die Kondition nach den ersten 90 Minuten merklich nach. Dennoch sind in den Protokollen erfreuliche Ansätze zu erkennen.

Die hier nicht kommentierten Kritikpunkte der Schüler zu den Arbeitsoberflächen waren ausgesprochen konstruktiv und haben zu einer besseren Handhabung sämtlicher Tools beigetragen.

Es hat sich gezeigt, dass bei einer Nutzung der Tools in der Schule mehr Zeit eingeplant werden muss. Das globale Ziel, die Beschreibung der Entwicklung einer Population unter Konkurrenzeinfluss, sollte stärker betont werden. Die jeweiligen Ergebnisse der einzelnen Simulationstools müssen demnach nicht nur notiert, besprochen und begründet, sondern auch im Hinblick auf dieses Ziel kritisch hinterfragt werden. Die Vorschläge zur Umsetzung der Tools im Unterricht sind auf der dargestellten Stufe noch nicht ausgereift. Es hat sich gezeigt, dass die in allen drei Gruppen veranschlagte Zeit zu kurz war. Daher scheint es angemessen, die Modellentwicklung über einen längeren Zeitraum zu behandeln. So haben die Schüler die Möglichkeit, Ergebnisse in Ruhe zu reflektieren und so tiefgehende Erkenntnisse zu gewinnen. Hier öffnen sich Möglichkeiten konkrete Unterrichtseinheiten zu entwerfen, die auf der Basis der Erfahrungen aus den Testläufen mit den Schülern besser an schulische Voraussetzungen und Notwendigkeiten angepasst werden.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Der mathematischen Modellbildung ist mit der Einführung der neuen Kernlehrpläne im Land NRW ein fester Platz in der Schulmathematik zugewiesen worden. Es ist wichtig, dass bereits in frühen Klassen Modelle bewusst genutzt und besprochen werden, denn so wird die Arbeit und die kritische Auseinandersetzung mit mathematischen Modellen langfristig erlernt. Mit zunehmenden Fertigkeiten und Erfahrungen im Umgang mit und in der kritischen Betrachtung von Modellen sollte mehr und mehr der Modellbildungsprozess auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus in der Schule thematisiert werden. Die Kritik an bestehenden und angewendeten Modellen kann dabei hilfreich sein, gute Ansätze zu übernehmen und andere zu verbessern. Es erscheint dabei unabdingbar, die Modellbildung nicht durch pseudo-reale Daten oder Informationen zu begründen und nicht nur mit vorgefertigten Modellen zu arbeiten, sondern mit den entsprechenden Fachwissenschaften zu kooperieren. Hier bietet sich ein echter Ansatz zu einem fächerverbindenden Unterricht.

Die vorliegende Arbeit zeigt exemplarisch an zwei unterschiedlichen Inhalten, dass eine realitätsbezogene Modellierung in der Schule möglich ist. Mit Hilfe der vorgestellten Tools und der darin enthaltenen Konzeptmodelle ist es gelungen, Populationen unter intraspezifischen Konkurrenzeinflüssen wie auch chemische Reaktionen auf elementarer Ebene zu simulieren und zu visualisieren, Abläufe zu beobachten und Zusammenhänge zu erarbeiten. Dies beginnt mit den Basistools, die bereits Schülern der Sekundarstufe I die Möglichkeit bieten, Abläufe einer chemischen Reaktion auf molekularer Ebene in vereinfachter Form sowie die Entwicklung einer Population unter Konkurrenzeinfluss innerhalb eines einfachen Simulationsmodells zu beobachten. In älteren Klassen können dann tiefergehende Erkenntnisse mit den weiterführenden Tools gewonnen werden, so dass mit dem entsprechenden Wissen aus der Analysis in der Oberstufe die Auswertung der Simulationsergebnisse zu mathematischen Modellen führt.

Die bei den Konkurrenzmodellen zur Analyse notwendigen mathematischen Kenntnisse gehören durchaus zur Obligatorik der gymnasialen Oberstufe. Im Falle des Ricker-Modells wurde dabei ein seit langem bekanntes Modell auf eine für Schüler nachvollziehbare Weise entwickelt.

Die Herleitung des Massenwirkungsgesetzes ist auf unterschiedlichen Ebenen möglich, angefangen bei einer einfachen, aber für Schüler nachvollziehbaren Plausibilitätserklärung bis hin zu Grenzwertbetrachtungen, die eher in den universitären Bereich einzuordnen sind.

Modellbildungsprozesse sind in Schulbüchern aber auch in Lehrwerken für Studenten nur selten zu finden. Insbesondere für die angewandte Mathematik bieten die entwickelten Tools Möglichkeiten, Modellbildung auf elementare Weise zu lehren und zu erlernen.

Die dargestellten mathematischen Überlegungen zur Modellbildung ohne Nutzung der

Simulationstools zeigen Anwendungen der Kombinatorik und Stochastik in Verbindung mit Grenzwertbetrachtungen.

Ansatzpunkte für weiterführende Arbeiten sind zunächst in der Erweiterung des Kästchenmodells auf andere Anwendungen zu sehen. Beispielsweise kann durch eine Unterteilung der Kästchens in zwei Bereiche die Diffusion näher betrachtet werden. Eine Übertragung des Kästchenmodells zu den chemischen Reaktionen in die Biologie könnte genutzt werden, um Räuber-Beute-Beziehungen zu untersuchen.

Die vorhandenen Modellansätze bieten ebenfalls Erweiterungsmöglichkeiten. Die Konkurrenzmodelle könnten dahingehend variiert werden, dass sich Konkurrenz nicht total, sondern abgeschwächt auswirkt. Das Modell zu den chemischen Reaktionen könnte auf Reaktionen mit einer größeren Anzahl von Edukten bzw. Produkten erweitert werden.

Die Arbeit mit den Schülern hat gezeigt, dass vor dem Einsatz der Tools in der Schule konkrete Unterrichtseinheiten geplant werden müssen. Die in dieser Arbeit teilweise nur skizzierten Überlegungen zum schulischen Einsatz sind nur ein Anfang, so dass hier wiederum Ansätze für weitere Arbeit zu finden sind.

Es wird sich zeigen, ob die in dieser Arbeit dargestellten Vorstellungen, Modellbildung anhand realer Problemstellungen in die Schule zu bringen, schließlich den Weg in die Schule finden. Es ist aber notwendig, geeignete Materialien zu entwickeln, um den Modellbildungsprozess an realen Problemstellungen in der Schule zu erarbeiten. Die hier vorgestellten Simulationstools und Modellierungen sind diesbezüglich ein Anfang. Im Hinblick auf eine allgemeinbildende Mathematikausbildung bleibt zu hoffen, dass die Ideen zur Modellbildung, die durch die Kernlehrpläne aber auch die Richtlinien der Sekundarstufe II für das Land NRW gegeben wurden, sinnvoll umgesetzt werden. Schließlich soll den Schülern ein Begriff von Modellbildung vermittelt werden, der über die Anwendung fertiger Modelle und Anpassung von Parametern hinaus geht.

Anhang A

Mathematische Ergänzungen

A.1 Grenzwertbetrachtungen und Abschätzungen

In diesem Abschnitt werden die im Haupttext nur kurz angedeuteten Grenzwertbetrachtungen ausführlicher dargestellt.

A.1.1 Die Wahrscheinlichkeit für $1 \leq i < a$ besetzte Kästchen bei festem a und $N \rightarrow \infty$

In Abschnitt 3.4.4 wurde lediglich der Fall betrachtet, dass genau a Kästchen besetzt werden. Für die übrigen Summanden s_i des Erwartungswertes gilt:

$$\begin{aligned} s_i &= i \cdot \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{a-1}{a-i}}{\binom{N+a-1}{a}} \\ &= i \cdot \binom{a-1}{a-i} \cdot \frac{a!}{i!} \cdot \frac{N! \cdot (N-1)!}{(N-i)! \cdot (N+a-1)!} \\ &= i \cdot \binom{a-1}{a-i} \cdot \frac{a!}{i!} \cdot \frac{(N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-(i-1))}{(N+(a-1)) \cdot (N+(a-2)) \cdot \dots \cdot (N+1)} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Bei festem a und $1 \leq i < a$ ist im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ nur der letzte Bruch zu betrachten, da die vorherigen Faktoren nach oben abgeschätzt werden können. Im Zähler des Bruches treten $i-1$ Faktoren der Form $(N-\alpha)$ ($\alpha \in \mathbf{R}$), im Nenner hingegen $a-1$ und somit mindestens ein Faktor mehr der besagten Form auf. Die Auflösung der Klammern liefert damit im Nenner ein Polynom von N höheren Grades als im Zähler. Somit folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} s_i &= i \cdot \binom{a-1}{a-i} \cdot \frac{a!}{i!} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-(i-1))}{(N+(a-1)) \cdot (N+(a-2)) \cdot \dots \cdot (N+1)} \\ &= i \cdot \binom{a-1}{a-i} \cdot \frac{a!}{i!} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.1.2 Die Abschätzung des Restglieds in Abschnitt 3.4.5

Jeder Summand des Restglieds ist selbst wieder eine Summe von Brüchen mit gemischten Kombinationen von α ($2 \leq \alpha \leq a-1$) paarweise unterschiedlicher Faktoren im Zähler

und der Potenz N^α im Nenner:

$$|S_\alpha| = \frac{\sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_\alpha} j_1 \cdot j_2 \cdot \dots \cdot j_\alpha}{N^\alpha}, \quad \text{mit } j_i \in \{1, 2, 3, \dots, a-1\} \quad (\text{A.3})$$

Diese Summanden können auf folgende Weise abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} |S_\alpha| &\leq \sum_{j_1=1; j_2=1; \dots; j_\alpha=1}^{a-1} \frac{\prod_{i=1}^{\alpha} j_i}{N^\alpha} \\ &\leq \prod_{i=1}^{\alpha} \sum_{j_i=1}^{a-1} \frac{j_i}{N} \\ &= \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{a(a-1)}{2N} \\ &\leq \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{a^2}{N} \\ &= \left(\frac{a^2}{N}\right)^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Somit folgt, dass sich jeder Summand $|S_\alpha|$ des Restgliedes nach oben durch $\left(\frac{a^2}{N}\right)^\alpha$ abschätzen lässt.

A.1.3 Grenzwertbetrachtungen zum Erwartungswert in Abschnitt 3.4.6

Die zu untersuchende Summe hat folgendes Aussehen:

$$S = \sum_{i=0}^a i \cdot \frac{\binom{N}{i} \cdot \binom{a-1}{a-i}}{\binom{N+a-1}{a}} \quad (\text{A.5})$$

Abschätzung der Summanden

Der letzte Summand s_a lautet konkret:

$$\begin{aligned} s_a &= a \cdot \frac{\binom{N}{a} \cdot \binom{a-1}{a-a}}{\binom{N+a-1}{a}} \\ &= a \cdot \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Für den vorletzten Summanden s_{a-1} gilt:

$$\begin{aligned} s_{a-1} &= (a-1) \cdot \frac{\binom{N}{a-1} \cdot \binom{a-1}{1}}{\binom{N+a-1}{a}} \\ &= a \cdot \frac{(a-1)^2}{N-a+1} \cdot \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

weiter gilt:

$$s_{a-2} = a \cdot \frac{((a-1) \cdot (a-2))^2}{2!(N-a+1) \cdot (N-a+2)} \cdot \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \quad (\text{A.8})$$

Allgemein gilt für s_{a-k} :

$$s_{a-k} = a \cdot \frac{((a-1) \cdot (a-2) \cdot \dots \cdot (a-k))^2}{2!(N-a+1) \cdot (N-a+2) \cdot \dots \cdot (N-a+k)} \cdot \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \quad (\text{A.9})$$

Dieser Summand kann wegen $\frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \leq 1$ nach oben abgeschätzt werden:

$$s_{a-k} \leq a \cdot \frac{a^{2k}}{N^k} \cdot \frac{\binom{N}{a}}{\binom{N+a-1}{a}} \leq a \cdot \left(\frac{a^2}{N}\right)^k \quad (\text{A.10})$$

Anhang B

Das Ricker-Modell

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts untersuchte der Biologe W. E. RICKER in Nordamerika unterschiedliche Fischarten und deren Populationsentwicklung. In einer Arbeit¹ aus dem Jahr 1954 beschreibt Ricker die Herleitung einer Reproduktionsfunktion, die einem Bestand einer Population die Größe der Nachkommenschaft zuordnet. Ziel war hierbei eine allgemeine Theorie der Reproduktion, die zu einer standardisierten Reproduktionskurve führt, welche auf viele Populationen angewendet werden kann. Grundlage dieser Überlegung war die Untersuchung vieler eigener Beobachtungen an Fischpopulationen aber auch die Analyse von Beobachtungen und Daten anderer Wissenschaftler zur Populationsentwicklung. Das dabei entwickelte Modell ist im Gegensatz zu den damals bekannten Modellen insofern neu, als Ricker in seinem Artikel die Population unterteilt in fortpflanzungsfähige Alttiere und nicht fortpflanzungsfähige Jungtiere. Im Folgenden werden die wesentlichen Inhalte des Artikels zusammenfassend dargestellt. Soweit es sich anbietet, wird auf Parallelen zu den Ausführungen in Kapitel 2 eingegangen.

B.1 Zusammenfassung des Artikels

Zu Beginn stellt Ricker grundlegende Ideen zur Regulation von Populationsgrößen dar, wobei er sich grundsätzlich auf Fischpopulationen bezieht. Es ist bis dato allgemein erwiesen, dass die Anzahl der Nachkommen einer Population von deren Dichte in einem begrenzten Habitat abhängig ist. Es kann festgestellt werden, dass Populationen in einem begrenzten Lebensraum langfristig einen festen Bestand nicht überschreiten. Bei manchen Spezies liegt der tatsächliche Bestand bei diesem Limit, bei anderen wechselt der Bestand in Zyklen. Ausgangsgleichung bei dem Versuch bisheriger mathematischer Beschreibungen war die logistische Gleichung von Verhulst:²

$$\frac{dN_t}{dt} = \frac{bN_t(K - N_t)}{K} \quad (\text{B.1})$$

Laut Ricker ist die Unterteilung in zwei Lebensphasen allerdings sinnvoll, da Regulationsmechanismen in der frühen Lebensphase größere Effekte haben. Daher konzentriert er sich in der Betrachtung hauptsächlich auf die Effekte dichteabhängiger Sterblichkeit, die sich auf die frühe Lebensphase, also auf Individuen vor der Geschlechtsreife beziehen. In diesem Zusammenhang wird unterschieden zwischen *regulierender Sterblichkeit*

¹vgl. Ricker [26]

²vgl. Ricker [26] S. 562 und Verhulst [32]

(compensatory mortality) und *nicht-regulierender Sterblichkeit* (non-compensatory mortality).³ Erstere bezieht sich somit ausschließlich auf dichteabhängige Faktoren, die den Bestand an Jungtieren dezimieren. Weitere Faktoren, die die Sterblichkeit von reifen Individuen bedingen, werden als *nicht-regulierende* Faktoren bezeichnet. Der Begriff der Reproduktion wird daher hier in etwas abgewandelter, eher übergreifender Form benutzt. Mit Reproduktion wird die Zahl an Nachkommen gemeint, die die Fortpflanzungsfähigkeit erlangt haben.

Im Folgenden werden unterschiedliche Arten von Regulationsmechanismen vorgestellt.

„KINDS OF POPULATION CONTROL MECHANISMS [..]

1. Prevention of breeding by some members of large populations because all breeding sites are occupied. Note that territorial behavior may restrict the number of sites to a number less than what is physically possible.
2. Limitation of *good* breeding areas, so that with denser populations more eggs and young are exposed to extremes of environmental conditions, or to predators.
3. Competition for living space among larvae or fry, so that some individuals must live in exposed situations. This too is often aggravated by territoriality - that is, the preemption of a certain amount of space by an individual, sometimes more than is needed to supply necessary food.
4. Death from starvation or indirectly from debility due to insufficient food, among the younger stages of large broods, because of severe competition for food.
5. Greater losses from predation among large broods because of slower growth caused by greater competition for food. [..]
6. Cannibalism: destruction of eggs or young by older individuals of the same species. [..]
7. Larger broods may be more affected by macroscopic parasites or microorganisms, because of more frequent opportunity for the parasites to find hosts and complete their life cycle.
8. In limited aquatic environments there may be a ‚conditioning‘ of the medium by accumulation of waste materials that have a depressing effect upon reproduction, increasingly as population increases.“⁴

Unter den hier aufgeführten Mechanismen sind einige Punkte zu finden, die sehr großen Bezug zum Konkurrenzmodell 2 haben. Insbesondere die Punkte 1 und 2 lassen einen Zusammenhang erkennen. Dementgegen ist eine Entsprechung zu Konkurrenzmodell 1 nicht direkt ersichtlich. Lediglich in Punkt 8 könnte eine Entsprechung insofern gefunden werden, als die Menge an „waste materials“- hier vielleicht eher als Ausscheidungen gemeint - auch als abgesonderte Gifte von einzelnen Individuen interpretiert werden könnte. Dies erinnert an die Beispiele von Walnussbaum und Apfelbaum zum Konkurrenzmodell 1.

Nun stellt Ricker unterschiedliche Reproduktionskurven vor. Bei den vorliegenden Beispielen wird stets auf der Abszisse die Anzahl der Eier der Elterngeneration und auf der Ordinate die Anzahl der Eier der Nachfolgegeneration abgetragen. Diese etwas komplizierte Abtragung kann auch so interpretiert werden, dass auf der Abszisse die Elterngeneration und auf der Ordinate die Anzahl der fortpflanzungsfähigen Nachkommen abgetragen wird. Die unterschiedlichen Beispiele zeigen Reproduktionskurven, die von verschiedenen Startpunkten aus zu einem stabilen Punkt gelangen, aber auch Kurven in denen Zyklen zu erkennen sind. Eine Auswahl dieser Kurven ist in den folgenden Abbildungen zu sehen.

³Ricker [26] S. 562

⁴Ricker [26] S. 562-563

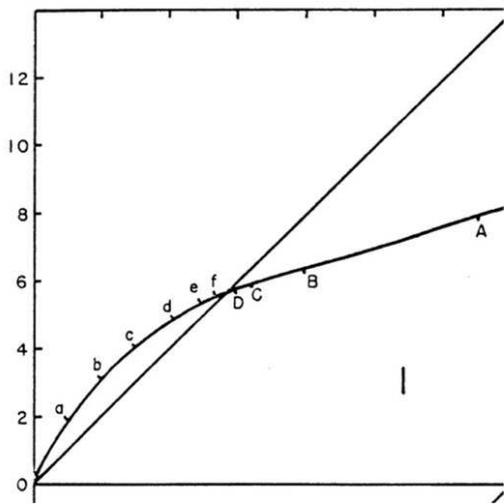


Abbildung B.1: Reproduktionskurve 1 mit steigender Reproduktion; aus Ricker [26] S. 564

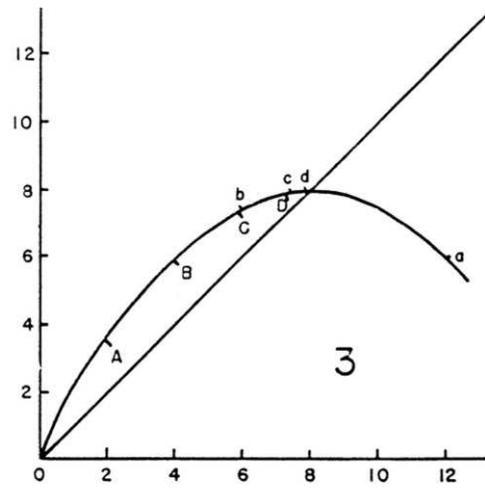


Abbildung B.2: Reproduktionskurve 2 mit abfallender Reproduktion; aus Ricker [26] S. 564

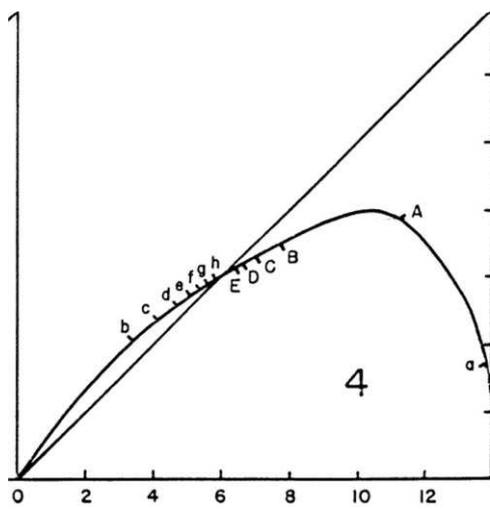


Abbildung B.3: Reproduktionskurve 3 mit abfallender Reproduktion; aus Ricker [26] S. 564

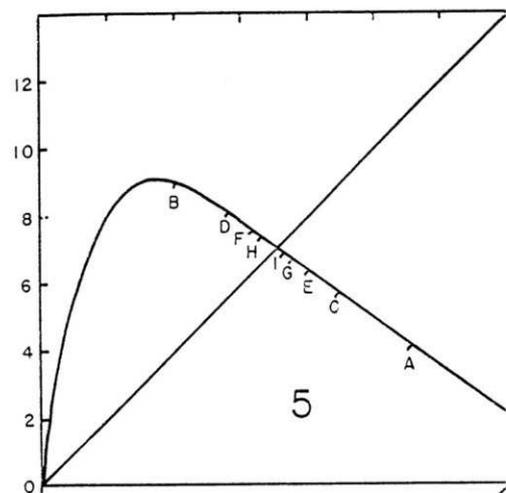


Abbildung B.4: Reproduktionskurve 4 mit oszillierender Annäherung zum Fixpunkt; aus Ricker [26] S. 565

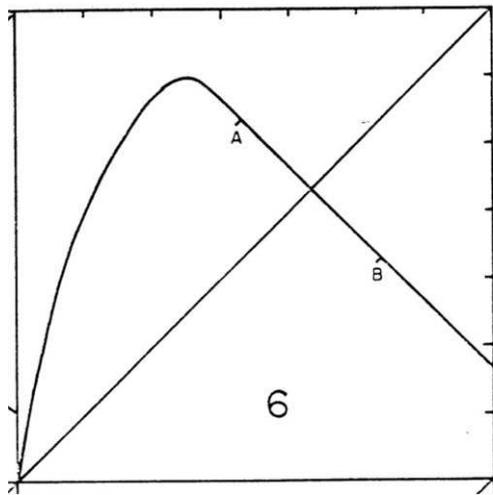


Abbildung B.5: Reproduktionskurve 4 mit 2er-Zyklus; aus Ricker [26] S. 565

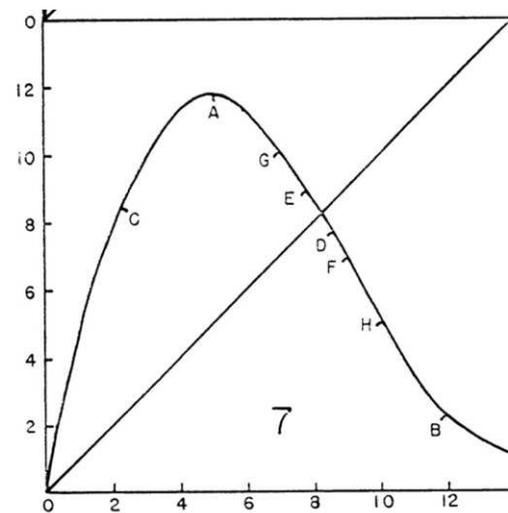


Abbildung B.6: Reproduktionskurve 4 mit 8er-Zyklus; aus Ricker [26] S. 565

In den nächsten zwei Abschnitten stellt Ricker Untersuchungsergebnisse zur der Frage vor, inwieweit die Reproduktion durch die Dichte beeinflusst wird. Ferner wird auf die Kombination von *regulierender* und *nicht-regulierender* Sterblichkeit eingegangen. Es schließt sich eine Betrachtung der Effekte an, die entstehen, wenn Teile des fortpflanzungsfähigen Teils einer Population entfernt wird. Ab Seite 586 werden Beispiele für Reproduktionskurven im Zusammenhang mit realen Erhebungsdaten dargestellt. Hierbei bezieht er sich zunächst auf unterschiedliche Fischarten wie den Pazifik-Hering, unterschiedliche Lachsarten und Schellfisch. Weiter zitiert Ricker Arbeiten, die sich ebenfalls mit Reproduktionskurven befassen. So haben beispielsweise R. PEARL und S. PARKER aufgrund mehrerer Versuche mit Fruchtfliegen 1920 eine optimale Populationsdichte für die Reproduktion herausgefunden.⁵ Fazit dieser und anderer Untersuchungen ist, dass es Fälle gibt, in denen die Erhebungsdaten sehr gut durch Reproduktionskurven der vorgestellten Arten angenähert werden können, andererseits teilweise auch keine direkten Verbindungen auszumachen sind.

Schließlich versucht Ricker eine allgemeine Theorie zur Reproduktion aufzustellen. Auch wenn eine Legitimation, der Nutzung von Reproduktionsfunktionen erst durch Langzeitstudien erfolgen könne, wäre es nützlich, eine allgemeine Reproduktionskurve zu entwickeln, die auf die Mehrzahl der beobachteten Populationen angewendet werden kann.⁶ Dazu wählt Ricker den Zugang über die Betrachtung eines Räuber-Beute-Verhältnisses, bei dem die Jungtiere einer Population von Tieren der eigenen Art aber auch von artfremden Räubern gejagt werden. Zunächst werden drei unterschiedliche Arten von Räuber-Beute-Beziehungen unterschieden, wobei sich Ricker auf eine eigene, frühere Arbeit aus dem Jahre 1952 bezieht:

„It is convenient to distinguish three types of numerical relationship between predators and a species of prey which they attack.

A. Predators of any given abundance take a fixed number of the prey species during the time they are in contact, enough to satiate them. The surplus escapes.

B. Predators at any given abundance take a fixed fraction of prey species present,

⁵Ricker [26] S. 595

⁶vgl. Ricker [26] S. 609

as though there were captures at random encounters.

[...]

SITUATION B

C. Predators take all the individuals of the prey species that are present, in excess of a certain minimum number. This number may be determined in different ways:

(1) There may be only a limited number of secure habitable places in the environment, so that some prey are forced to live in exposed situations where capture is inevitable. The number of such secure niches may be partly governed by territorial behavior of the prey. (2) The maximum „safe“ density of prey may be the one at which predators no longer find it sufficiently rewarding to forage for them, and move to other feeding grounds. The three situations above tend to intergrade, of course, but it is useful to keep their differences in mind.“⁷

Im weiteren Verlauf bezieht sich Ricker auf Typ B, bei dem die Räuberpopulation einen bestimmten Anteil der Beutepopulation während der Zeit erlegt, in der die beiden Populationen in Kontakt treten. Somit ist der Anteil an erlegten Beutetieren als proportional zum Bestand an Beutetieren und an Räubern anzunehmen. Beschreibt $N(t)$ den Bestand der Beutepopulation zum Zeitpunkt t und P den als zeitlich konstant angenommenen Bestand der Räuber, so geht Ricker daher davon aus, dass der Bestand der Beutepopulation durch folgende Funktion beschrieben werden kann.

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t} \quad (\text{B.2})$$

Hierbei ist λ proportional zum Bestand der Räuberpopulation. Es folgt demnach:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda_0 \cdot P \cdot t} \quad (\text{B.3})$$

Um nun die Reproduktion lediglich auf intraspezifische Faktoren beziehen zu können, nutzt Ricker das Phänomen des Kannibalismus, der gerade bei Fischpopulationen recht häufig vorkommt.⁸ Somit werden sämtliche extraspezifischen Faktoren vernachlässigt.

Hier kommt die Unterteilung des Bestands einer Population in Jung- und Alttiere zum Tragen. Ricker betrachtet die Alttiere als Räuber und die Jungtiere als Beutepopulation. Aus mathematischer Sicht sind die weiteren Ausführungen nicht ganz unkritisch zu sehen, wobei sich die Grundidee wie folgt herauslesen lässt.

Ricker betrachtet ein Einheitszeitintervall, in dem eine Elternpopulation zu einem bestimmten Zeitpunkt Eier legt und am Ende aus einem Teil der Eier forpflanzungsfähige Tiere entstanden sind. Der Bestand an Elterntieren wird als Räuber interpretiert und der Bestand an Jungtieren und Eier als Beute. Die Zeit, in der die Jungtiere als Beute anzusehen ist, endet kurz vor dem Ende des Einheitsintervalls. Die dann übrig gebliebenen Jungtiere werden geschlechtsreif und bilden die neue Elterngeneration. Die Anzahl der gelegten Eier zum Zeitpunkt t_0 ist als proportional zum Bestand an Elterntieren mit dem Proportionalitätsfaktor q anzunehmen. Es sei $P(0)$ der Bestand an Elterntieren zum Zeitpunkt t_0 und $N(0)$ der Bestand an Jungtieren (Eiern) zum Zeitpunkt t_0 . Aufgrund der angenommenen Proportionalität gilt somit:

$$N(0) = q \cdot P(0) \quad (\text{B.4})$$

⁷Ricker [26] S. 609

⁸In Abschnitt 2.2 wurde bereits auf ähnliche Beobachtungen in der Realität, insbesondere auf den Kainismus hingewiesen. Dieser bezieht sich allerdings nur auf Tötung bzw. Kannibalismus innerhalb der Nachkommenschaft. Ricker betrachtet Kannibalismus als generationsübergreifendes Phänomen.

Mit der Gleichung (B.2) kann der Bestand an überlebenden Jungtieren nach der Zeit τ durch folgende Gleichung angegeben werden. Hierbei steht τ für den Zeitraum zwischen Beginn der Eiablage und Sterben der Elterngeneration.

$$\begin{aligned} N(1) &= N(0) \cdot e^{-\lambda P(0) \cdot \tau} \\ &= q \cdot P(0) \cdot e^{-\lambda P(0) \cdot \tau} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Wird davon ausgegangen, dass die Lebensdauer eines erwachsenen Tieres genau einer Zeiteinheit entspricht, so entspricht $N(t+1)$ (im obigen Beispiel $N(1)$) genau der Anzahl an intraspezifischen Räubern in der nächsten Generation. Werden die konstanten Faktoren im Exponenten zu a zusammengefasst, ergibt sich somit:

$$N(t+1) = q \cdot N(t) \cdot e^{-aN(t)} \quad (\text{B.6})$$

Bezeichnet n den Bestand der Elterngeneration, so ergibt sich die folgende Reproduktionsfunktion $R(n)$:

$$R(n) = q \cdot n \cdot e^{-an} \quad (\text{B.7})$$

Diese Reproduktionsfunktion ist als Ricker-Modell in der Biologie seit den 1950er Jahren gebräuchlich.

B.2 Fazit

Es ist zu vermuten, dass Ricker nach der Analyse seiner und der Daten seiner Kollegen bereits eine klare Vorstellung von der Form der Reproduktionsfunktion hatte. Die etwas komplizierte Herleitung basiert insgesamt auf der Aufteilung der Population in zwei unterschiedliche Teilpopulationen und einem Kannibalismus zwischen diesen Teilpopulationen. Bei der Herleitung der Reproduktionsfunktion in Kapitel 2 wird auf diese Aufteilung verzichtet.

B.3 Eine Variante: *Kampf der Larven*

Die hier beschriebene Variante geht davon aus, dass die Jungtiere sich gegenseitig bekämpfen und die Generation der Elterntiere nach der Eiablage stirbt. Der Kampf beginnt, sobald die Jungtiere, beispielsweise als Larven, geschlüpft sind und endet bei Erreichen der Fortpflanzungsfähigkeit. Beispiele für dieses Verhalten sind im Tierreich durchaus zu finden (vgl. Abschnitt 2.2).

Wird die Anzahl der „kämpfenden“ Individuen mit N angenommen, kann davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der Aufeinandertreffen zweier Individuen proportional zu N^2 ist.⁹ Die Änderung der Jungtierpopulation in einem Zeitschritt kann daher folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{dN}{dt} = -cN^2, \quad \text{mit } c > 0 \quad (\text{B.8})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$N(\tilde{\tau}) = \frac{M}{1 + c\tilde{\tau}M} \quad (\text{B.9})$$

⁹vgl. Überlegungen zum Massenwirkungsgesetz in Abschnitt 3.4.7 und Bohl [4] S. 7ff

Hierbei ist M der Bestand bei $\tilde{\tau} = 0$, $\tilde{\tau}$ steht für die Zeitdauer, in der die Individuen aufeinandertreffen können (hier: Zeitpunkt des Schlüpfens bis zum Erreichen der Fortpflanzungsfähigkeit).

Es sei nun $N(t)$ die Anzahl der Eltern zum Zeitpunkt t . Unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Eier proportional zum Bestand der Eltern ist, sei die Anzahl der gelegten Eier $q \cdot N(t)$ ($q > 0$). Die aus den Eiern geschlüpften Larven bekämpfen sich für einen Zeitraum $\Delta t \leq 1$ ($\Delta t \hat{=} \tau$). Die Anzahl der danach überlebenden und somit fortpflanzungsfähigen Individuen $N(t + 1)$, also die neue Elterngeneration, wird ermittelt durch:

$$N(t + 1) = \frac{q \cdot N(t)}{1 + c \cdot \Delta t \cdot q \cdot N(t)}$$

$$\stackrel{K:=c \cdot \Delta t \cdot q}{=} \frac{q \cdot N(t)}{1 + K \cdot N(t)} \tag{B.10}$$

Abbildung B.7 zeigt beispielhaft den Verlauf des Bestandes einer entsprechend modellierten Population.

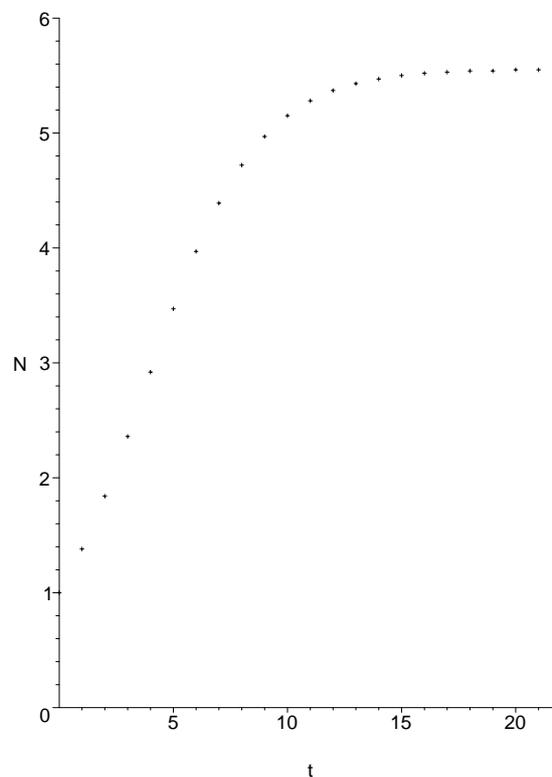


Abbildung B.7: Populationsbestand mit $\Delta t = 0,6$; $c = 0,1$; $q = 1,5$ und $K = 0,09$; Abszisse: Zeit, Ordinate: Bestand

Das hier aufgestellte Modell ist als MONODSches¹⁰ Kinetik-Modell in der Literatur bekannt.¹¹

Damit ist eine Herleitung dieses Modells auch für Populationen gegeben.

¹⁰Jacques Lucien Monod 1910 - 1976

¹¹vgl. Bayer/Nowak [3] S. 339ff

Name(n)/Gruppe:		Datum (TT/MM/JJ):	
Fragestellung	Parameter	Beobachtung	Folgerung / neue Fragestellung

Abbildung C.2: Protokollbogen für Gruppe 1 Blatt 2

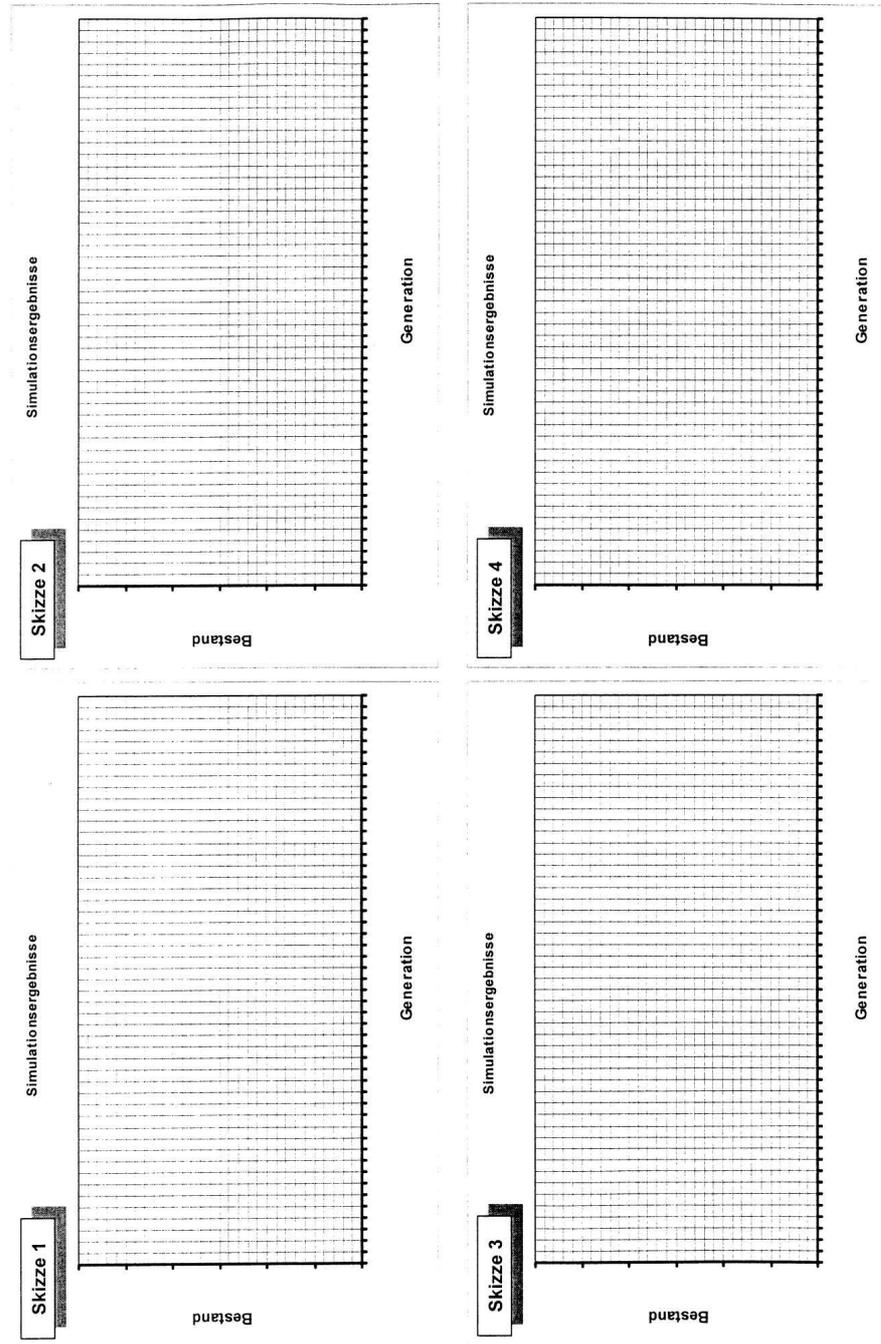


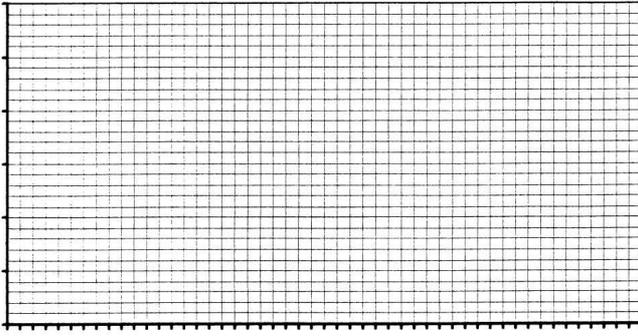
Abbildung C.3: Protokollbogen für Gruppe 1 Blatt 3

C.2 Protokollbögen Gruppe 2

Schülersymposium 2004 math. Modelle **Blatt 1**
 Protokoll zur Arbeit mit dem Kästchenmodell

Name(n)/Gruppe:	Datum (TT/MM/JJ):
------------------------	--------------------------

Fragestellung:
 Vergleichen Sie die langfristige Entwicklung von KM1 und KM2 für ausgewählte Parameter. Dafür soll die Startgröße konstant gleich 1 gehalten werden und nur der Parameter q variiert werden, wobei q die Werte 1, 5 und 20 annehmen soll. Beobachtungen sollen beschrieben werden und der qualitative Verlauf für die unterschiedlichen Parametereinstellungen skizziert werden. Aus den Beobachtungen sind neue Fragestellungen zu entwickeln.

Simulationsergebnisse		Parameter ¹⁾ :			
Generationsgröße		Nr.	SG	q	KM
		1			
		2			
		3			
		4			
		5			
		6			
		7			
		8			
		9			
		10			
		11			
		12			
		13			
	14				
	Generation				

Beobachtung:

Folgerung / neue Fragestellung:

1) SG = Startgröße; q = Reproduktionsfaktor; KM = Konkurrenzmodell (1/2)

Abbildung C.4: Protokollbogen für Gruppe 2 Blatt 1

Schülersymposium 2004 math. Modelle **Blatt 2**
Protokoll zur Arbeit mit dem Bestandsmodell KM 1

Name(n)/Gruppe:	Datum (TT/MM/JJ):
------------------------	--------------------------

Fragestellung:
Die Beobachtungen und Thesen aus dem Kästchenmodell sind zu überprüfen und gegebenenfalls zu präzisieren.
In diesem Tool ist es möglich Mittelwerte zu betrachten. Gibt es einen (funktionalen) Zusammenhang zwischen q und dem jeweiligen zeitlichen Mittelwert des Bestands bei fester Kästchenanzahl? Bei einer Kästchenzahl von 100 ist es für die Variation von q empfehlenswert Werte zwischen 3 und 11 zu wählen.
Erstellen Sie einen Plan zur Vorgehensweise und führen Sie diesen anschließend aus.
Erklären Sie Ihre gemachten Beobachtungen und halten Sie diese fest.

Planung:

Ergebnisse:

Abbildung C.5: Protokollbogen für Gruppe 2 Blatt 2

Schülersymposium 2004 math. Modelle **Blatt 3**
 Protokoll zur Arbeit mit der Reproduktionskurve KM 1

Name(n)/Gruppe:	Datum (TT/MM/JJ):
------------------------	--------------------------

Informationen:

Bisher haben Sie individuelle Populationen bzw. Generationen beobachtet. Mit dem neuen Tool wird nun untersucht, wie sich die Größe der Elterngeneration bei den jeweiligen Konkurrenzmodellen auf die Größe der ersten Nachfolgegeneration auswirkt. Es wird demnach untersucht, wie groß die Reproduktion einer Population mit einer bestimmten Größe nach einem Generationsschritt ist. Dieser Zusammenhang zwischen der Größe der Elternpopulation (auf der Ordinate) und der Größe der Nachfolgepopulation (auf der Abszisse) wird in einer sogenannten **Reproduktionskurve** dargestellt. Diese Reproduktionskurve wird im rechten Teilfenster des Tools dargestellt.

Aufgabe:

Machen Sie sich die im Diagramm dargestellten Zusammenhänge an Beispielen klar. Experimentieren Sie mit unterschiedlichen Werten für q , wobei die übrigen Parameter konstant bleiben. Wählen sie folgende Einstellungen:

- Es wird ein Kasten mit 200 Kästchen benutzt.
 - Man betrachtet Elterngenerationen mit 0 bis maximal 100 Individuen (maximale Generationsgröße liegt bei 100)
 - Es werden 50 Simulationen durchlaufen und q nimmt die Werte 5-25 in 5er Schritten an.
- Beschreiben Sie sowohl Vorgehen als auch ihre Ergebnisse und versuchen Sie Thesen aufzustellen.

Das finale Ziel ist es, eine funktionale Beschreibung *einer* „mittleren Reproduktionskurve“ zu erhalten.

geplantes Vorgehen:

Mögliche weitergehende Fragestellungen und/oder Thesen:

1. Das Maximum der Kurven bei festem N ist stets gleich.
Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Maximum und N ?
Wie kann man diesen Zusammenhang ermitteln?
Tipp:
Stellen Sie einen entsprechenden Zusammenhang in Form eines Diagramms dar und versuchen Sie einen passenden Funktionsterm zu ermitteln.
2. Der Verlauf der „Funktion“ ist qualitativ gesehen stets gleich. Kann man den Typ der dahinter stehenden Funktion ermitteln?
Tipps:
 - a) Verlassen Sie die Betrachtung der gesamten Population und untersuchen sie, wie die mittlere Reproduktion für ein Individuum der Elterngeneration bei vorgegebener Populationsgröße der Elterngeneration ist. (Excel-Datei)
 - b) Stellen sie die individuelle Reproduktion bei unterschiedlichen Elterngenerationsgrößen in einem Diagramm dar und untersuchen sie diese Funktion.
Was wird bei extrem hohen Populationsgrößen geschehen?
Welche Art von Funktionen kann dieses Diagramm darstellen?

Erweiterungsaufgabe II

Erweiterungsaufgabe

Die dargestellte Funktion ist allgemein darstellbar als eine Funktion folgenden Typs:

$f(x) = cx \cdot e^{kx}$, mit einer positiven Konstanten c und einer negativen Konstanten k .

Kann man anhand einer Kurve mit vorgegebenen Parametern die Werte der Konstanten ermitteln?

Tipps:

- a) Nutzen Sie die Ergebnisse aus den vorhergehenden Erweiterungsaufgaben.
- b) Wie ist der Exponent von e mithilfe der letzten Erweiterungsaufgabe zu ermitteln?
- c) Nutzen sie Ihre Kenntnis über die Bestimmung von Extrema bei Kurvendiskussionen.
- d) Welchen Wert hat die Änderung der Reproduktionskurve beim Wechsel von Elterngenerationen mit 0 Individuen zu einer Elterngeneration mit einem Individuum?

Abbildung C.8: Protokollbogen für Gruppe 2 Blatt 5

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Mit Hilfe des Kästchenmodells konnten verschiedene Entdeckungen gemacht werden. Nachdem das Modell selbst untersucht wurde und die langfristige Entwicklung einer Simulationspopulation in einem weiteren Tool beobachtet wurde, rückte die Reproduktionskurve in den Mittelpunkt. Erst diese Kurve hatte den Anschein, dass sie durch eine mathematischen Funktion angenähert beschrieben werden kann. Das Experimentieren mit unterschiedlichen Parametereinstellungen brachte folgende Entdeckungen:

- Bei konstanten Werten für N haben die Reproduktionskurven stets das gleiche Maximum, lediglich die Maximalstelle verändert sich. Sie wird mit steigendem Reproduktionsfaktor bei immer kleineren Eltern generationsgrößen erreicht.
- Die individuelle Reproduktionskurve hat einen Verlauf, der an eine Exponentialfunktion erinnert.
- Die logarithmische Abtragung der individuellen Reproduktionsfunktion liefert eine Funktion, die als lineare Funktion dargestellt werden kann.

Es resultiert, dass es sich bei der gesuchten mathematischen Funktion, die die Reproduktionsfunktion annähernd beschreiben soll, um eine Funktion handelt, die folgende Form besitzt:

$$f(n) = c \cdot n \cdot e^{-k \cdot n} \text{ mit positiven Konstanten } c \text{ und } k.$$

Bestimmung der Konstanten mit Hilfen aus der Analysis:

- a) Die mittlere Nachkommenzahl bei einer Eltern generation mit einem Individuum liegt nahe bei q, dem Reproduktionsfaktor. Annähernd kann man daher davon ausgehen, dass die Änderung der Reproduktionskurve von n=0 auf n=1 etwa mit q gleich zu setzen ist:

$$f'(0) \approx q$$

$$f'(n) = c \cdot e^{-kn} + c \cdot n \cdot (-k) \cdot e^{-kn}$$

$$f'(0) = c \cdot 1 + 0 = c$$

Es folgt daher, dass die Konstante c dem Reproduktionsfaktor q entspricht.

- b) Das Maximum der Reproduktionsfunktion hat bei festem N immer den gleichen Wert. Betrachtet man die Stelle, an der dieses Maximum erreicht wird, so muss man die Nullstelle der Ableitung von f bestimmen:

$$f'(n) = q \cdot e^{-kn} + q \cdot n \cdot (-k) \cdot e^{-kn}$$

$$f'(n) = 0 \Leftrightarrow (1 - kn) \cdot q \cdot e^{-kn} = 0 \Leftrightarrow (1 - kn) = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1}{k}$$

Der Wert des Maximums kann nun allgemein bestimmt werden:

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = q \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{k}} = \frac{q}{k} \cdot e^{-1}$$

Trägt man den Wert des Maximums in Abhängigkeit von N ab, so erkennt man folgenden Zusammenhang:

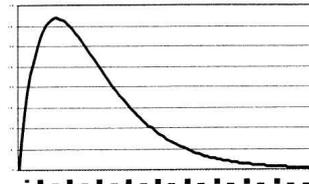
$$\text{Max}(N) = \frac{N}{e}$$

Somit folgt:

$$\frac{q}{k} \cdot e^{-1} = \frac{N}{e} \Leftrightarrow k = \frac{q}{N}$$

Schließlich folgt für die Reproduktionskurve:

$$f(n) = n \cdot q \cdot e^{-\frac{qn}{N}}$$



Diese Reproduktionskurve, die auf der Basis von Simulationen entwickelt wurde, ist bereits in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts von W. E. RICKER aufgrund von Zählungen bei Lachspopulationen entwickelt worden. Sie ging als sog. RICKER-MODELL in die biologische Wissenschaft ein und wird noch heute in vielen Bereichen benutzt.

Abbildung C.9: Protokollbogen für Gruppe 2 Blatt 6

C.3 Basisinformationen für Gruppe 3

Konkurrenz in Populationen

Sowohl bei Tieren als auch bei Pflanzen kommt es vor, dass die einzelnen Lebewesen zueinander in Konkurrenz stehen. Beispielsweise konkurrieren Pflanzen um Wasser und Licht, Raubfische konkurrieren in einem See um die Beutefische. In vielen Populationen kommt es vor, dass die Konkurrenz sich negativ auf die Anzahl der Nachkommen (Kinder) auswirkt. Wenn beispielsweise zu viele *Kohlmais* in einem bestimmten Bereich leben, bekommen die weiblichen Vögel weniger Eier als wenn es nur wenige Kohlmais gäbe. Das gleiche Phänomen kann man auch bei Mäusen beobachten.

Beim Mais kann ebenfalls festgestellt werden, dass die Anzahl der Körner auf einem Kolben geringer wird, wenn der Mais zu dicht steht, also auf einem Quadratmeter viele Maispflanzen stehen.

Bei anderen Tieren kommt es vor, dass die Konkurrenz innerhalb einer Art dazu führt, dass von vielen Kindern nur eines überlebt. Bei Raubvögeln, wie der *Rohrweihe*, wurde festgestellt, dass das Weibchen zwar ein paar Eier legt, von diesen Eiern aber nur ein Jungvogel überlebt, weil der erste geschlüpfte Jungvogel die anderen Eier aus dem Nest wirft oder seine jüngeren Geschwister auffrisst.

Der Walnuss- und der Apfelbaum produzieren Säuren, die über herabfallenden Blätter oder die Wurzeln ins Erdreich gelangen. Dadurch werden andere Pflanzen, sogar teilweise die eigenen Nachkommen, daran gehindert zu wachsen.



Abbildung C.10: Rohrweihe



Abbildung C.11: Zeichnungen zum Walnussbaum

Man kann zwei Arten von Konkurrenz unterscheiden:

Variante 1:

Wenn viele Individuen auf engem Raum zusammen leben, wird die Anzahl der Nachkommen geringer; es werden ggf. keine Nachkommen geboren.

Variante 2:

Durch direkte Konkurrenz kann es sein, dass in einem bestimmten Lebensbereich nur ein Nachkomme überlebt.

- Schwankt die Anzahl der Blumen immer gleich stark oder kommt es vor, dass die Anzahl der neuen Blumen sich nur sehr wenig ändert?
- Wie kann man möglichst viele neue Blumen erzielen?
- Was passiert bei den einzelnen Konkurrenzmodellen, wenn man die Anzahl der Samen pro Blume erhöht?

TIPP:

Schreibe Deine Frage auf und variiere bei den Experimenten nur eine Größe. Notiere die Ergebnisse Deiner Experimente! So kannst Du heraus finden, welchen Einfluss die geänderte Größe hat.

Viel Spaß beim Experimentieren!

C.4 Protokoll aus Gruppe 1

Protokoll zur Arbeit mit dem Kästchenmodell

Name(n)/Gruppe:

Tho Ra

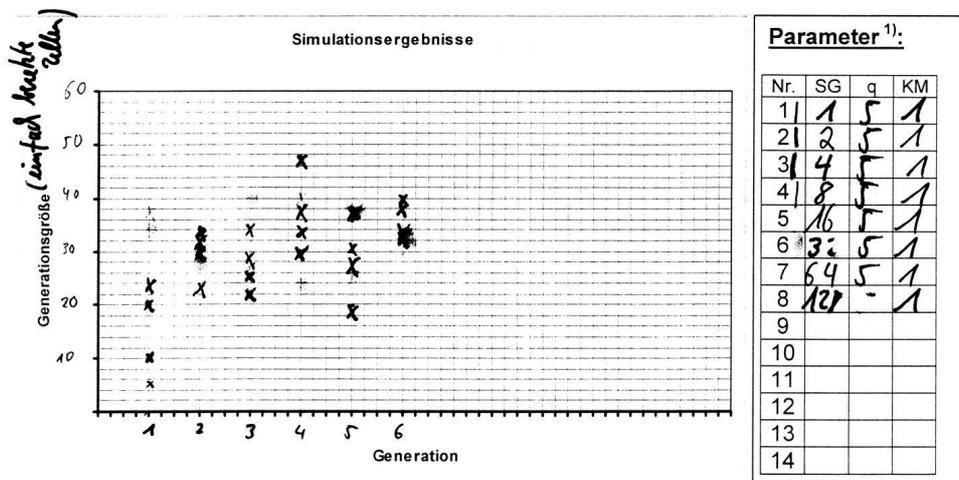
Datum (TT/MM/JJ):

19.07.2004

Fragestellung:

Wie wird sich eine Verdopplung der jeweils vorigen St bei $q = \text{const}$ auf die Anzahl der aus? einfach berechneten Zellen

nach 6 Gener.



Beobachtung:

Es zeigt sich, dass die Startgröße entgegen der Erwartung für die Anzahl der einfach berechneten Zellen nach 6 Generationen nicht von großer Bedeutung zu sein scheint. Im Bereich zwischen 30 und 40 einfach berechneten Zellen sammeln sich die Ergebnisse der verschiedenen Startgrößen nach sechs Generationen.

Folgerung / neue Fragestellung:

Die Wahrscheinlichkeit für möglichst viele einfach berechnete Zellen steigt nicht mit einer größeren St.

Wie verhält es sich bei KM?

1) SG = Startgröße; q = Reproduktionsfaktor; KM = Konkurrenzmodell (1/2)

Abbildung C.13: Protokoll einer Kleingruppe aus Gruppe 1

Danksagung

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle zunächst bei meinem Betreuer, Herrn Professor S. Walcher, für die Themenstellung bedanken. Aus vielen interessanten Diskussionen konnte ich konstruktive Anregungen gewinnen. Ebenso möchte ich mich bei den beiden Referenten, den Herren Professoren V. Liebscher und U. Michelsen für ihr Interesse und nützliche Hinweise herzlich bedanken. Dem Vorsitzenden der Prüfungskommission, Herrn Professor V. Enß, danke ich für die Durchführung des Promotionsverfahrens. Ein weiterer Dank gilt meinen Kolleginnen Daniela Dossing und Lena Nöthen für lohnende Literaturhinweise sowie aufschlussreiche Diskussionen.

Ein letzter Dank geht an meine Familie, die mich während der gesamten Promotionsphase in vielen Bereichen entlastet, motiviert und unterstützt hat.

Bernd Gotzen

Bildquellen

- **Abbildung 2.5 (Symbiose):**
Wissenspeicher Biologie. Volk und Wissen Verlag, Berlin 1994. bzw.
<http://www.geocities.com/dpirch/sympics/krebs.gif>
Datum 19.11.2005
- **Abbildung 2.6 (Tölpelkolonie):**
<http://www.tierenzyklopaedie.de/bigpix/btoelpel3b.jpg>
Datum 19.11.2005
- **Abbildung 2.7 (Juglon):**
<http://userpage.fu-berlin.de/~steidle/Juglon2.jpg>
Datum 19.11.2005
- **Abbildung C.10 (Rohrweihe):**
<http://www.bfn.de/natursport/test/SportinfoHTML/rohrweihe.php>, Bundesamt für
Naturschutz,
Datum 12.09.2005
- **Abbildung C.11 (Walnuss):**
http://suz-mitte.de/angebote/bilder_angebote/walnussbaum.gif
Datum 12.09.2005

Literaturverzeichnis

- [1] **Atkins, P. W.:** *Physikalische Chemie. 2. Auflage.* VCH, 1996
- [2] **Baum, M. et al.:** *Lambacher Schweizer Gesamtband Grundkurs, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Nordrhein-Westfalen.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2003
- [3] **Bayer, K.; Nowak, W. G.:** *Mathematische Modellbildung in der Mikrobiologie: Wachstum von Biomasse in einer Nährlösung.* aus: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, Bd. 53, S. 339 - 342, 2000
- [4] **Bohl, E.:** *Mathematik in der Biologie. 2. Auflage.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001
- [5] **Bossel, H.:** *Systeme, Dynamik, Simulation. Modellbildung, Analyse und Simulation komplexer Systeme.* Books on Demand GmbH, Norderstedt, 2004
- [6] **Campbell, N.:** *Biologie.* Spektrum Verlag, 1997
- [7] **Chung, K. L.:** *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes.* Springer-Verlag New York, 1974
- [8] **Dickerson, R. E.; Geis, I.:** *Chemie - Eine lebendige und anschauliche Einführung.* Wiley-VCH, 1981
- [9] **Eberl, H.:** *Nichtlineare hydrologische Konzeptmodelle für den Kanalabfluß und ihre Kallibrierung.* aus: *Berichte aus Wassergüte- und Abfallwirtschaft Technische Universität München.* Berichtsheft Nr. 139, München, 1998
- [10] **Eisner, W. et al.:** *Elemente Chemie II. Gesamtband. Unterrichtswerk für die Sekundarstufe II.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2000
- [11] **Griesel, H.; Postel, H.; Suhr, F. (Hrsg.):** *Elemente der Mathematik, Leistungskurs Analysis.* Schroedel Verlag, Hannover 2001
- [12] **Hartmann, C.:** *Mathematische Modelle der Wirklichkeit. Von der Theorie zum Computereperiment - mit Programm SIMMS auf Diskette.* Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1996
- [13] **Hertz, H.:** *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1963, unveränderter fotomechanischer Nachdruck der Ausgabe Leipzig, 1894
- [14] **Holleman, A. F.; Wiberg, E.:** *Lehrbuch der Anorganischen Chemie. 101. Auflage.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995

- [15] **Istas, J.:** *Mathematical Modelling for the Life Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005
- [16] **Jahnke, T.; Wuttke, H. (Hrsg.):** *Mathematik Analysis*. Cornelsen Verlag, Berlin 2002
- [17] **Koller, D. (Hrsg.):** *Simulation dynamischer Vorgänge*. Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1995
- [18] **Krengel, U.:** *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden 1988, 7. überarbeitete Auflage 2003
- [19] **Kroll, W.; Vaupel, J.:** *Grund- und Leistungskurs Analysis. Lehr und Arbeitsbuch*. Ferd. Dümmler Verlag, Bonn, 1989
- [20] **Kuypers, W.; Lauter, J.; Wuttke, H. (Hrsg.):** *Mathematik 10. Schuljahr*. Cornelsen Verlag, Berlin, 1995
- [21] **Lergenmüller, A.; Schmidt, G. (Hrsg.):** *Mathematik. Neue Wege 10*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers, Braunschweig, 2004
- [22] **Mortimer, C. E.:** *Chemie. Mit Übungsaufgaben. Übersetzt und bearbeitet von U. Müller. 6. völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage*. Thieme, Stuttgart, 1996
- [23] **Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes NRW:** *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II - Gymnasium/Gesamtschule in NRW. Mathematik*. Ritterbach Verlag, Frechen, 1999
- [24] **Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes NRW:** *Kernlehrplan für das Gymnasium- Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Mathematik*. Ritterbach Verlag, Frechen, 2004
- [25] **Murray, J. D.:** *Mathematical Biology. Second, corrected edition*. Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1993
- [26] **Ricker, W. E.:** *Stock and Recruitment*. aus: Journal of Fisheries Research Board Canada, 11(5), 1954
- [27] **Sonar, T.:** *Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 2001
- [28] **Stryer, L.:** *Biochemie. 4. Auflage*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999
- [29] **Sutter, E.; Barruel, P.:** *Die Brutvögel Europas. Band II*. Silva-Verlag, Zürich, 1958
- [30] **Tausch, M. (Hrsg.):** *Chemie SII. Stoff - Formel - Umwelt*. C. C. Buchners Verlag, Bamberg, 1993
- [31] **Tausch, M.; von Wachtendonk, M. (Hrsg.):** *Chemie 2000+. Band 1*. C. C. Buchners Verlag, Bamberg, 2001
- [32] **Verhulst, P. F.:** *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. Correspondance mathématique et physique publiée par Quételet vol. 10: 112-121, 1838
- [33] **Walcher, S.:** *Dynamische Systeme und Modellierung*. Skript, RWTH-Aachen, 2003

- [34] **Wedler, G.:** *Lehrbuch der Physikalischen Chemie*. Wiley-VCH, 4. überarbeitete und erweiterte Auflage, 1997
- [35] **Winter, H.:** *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. 2. verbesserte Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1991

Internetquellen

- [36] **Bundesamt für Naturschutz:** *Natur Sport Info*.
www.bfn.de/natursport/test/SportinfoHTML/greifvoegel.php, Bundesamt für Naturschutz,
Datum 12.09.2005
- [37] **Bundesamt für Naturschutz:** *Natur Sport Info*.
www.bfn.de/natursport/test/SportinfoHTML/rohrweihe.php, Bundesamt für Naturschutz,
Datum 12.09.2005
- [38] **geoscience-online:** *Das Magazin für Geo- und Naturwissenschaften*.
www.g-o.de/index.php?cmd=focus_detail2&f_id=106&rang=8 Springerverlag, Heidelberg,
Datum 12.09.2005
- [39] **Sinsch, U.:** *Grundlagen der Ökologie. Autökologie (Physiologische Ökologie). Studienbrief 3: Die Biotischen Faktoren*. Institut für Biologie Universität Koblenz-Landau, o. J.
www.uni-koblenz.de/wfu/shop/abstracts/autoekologie3.pdf
Datum 12.09.2005
- [40] **wissenschaft-online:** *Kompaktlexikon der Biologie*.
www.wissenschaft-online.de/abo/lexikon/biok/420, Spectrum Akademischer Verlag,
Datum 12.09.2005

Lebenslauf

Persönliche Daten

Bernd Gotzen

Geb. am 21.04. 1972 in Mönchengladbach
verheiratet mit Stefanie Gotzen, geb. Coens
eine Tochter
deutsche Staatsangehörigkeit

Schulbildung

1978–1982 Grundschole an der Körnerstrae
1982–1991 städt. Humanistisches Gymnasium Viersen
Abschluss 06/1991 Allgemeine Hochschulreife

Wehrdienst

10/1991–09/1992 Sanitätskraftfahrer im Jagdbombergeschwader 31 „Bölke“,
Kerpen
Letzter Dienstgrad: Hauptgefreiter

Studium

10/1992–07/1997 Studium der Mathematik und Informatik für das
Lehramt Sek. I/II

10/1995–02/1997 Studentische Hilfskraft am im Fachbereich Informatik an der UNI
GH Duisburg

Abschluss 07/1997 1. Staatsexamen für das Lehramt Sek. I/II für die Fächer
Mathematik und Informatik

Berufliche Ausbildung

02/1998–01/2000 Referendariat am Studienseminar Jlich
Ausbildungsschule: Erftgymnasium, Bergheim

Abschluss 01/2000 2. Staatsexamen für das Lehramt Sek. I/II für die Fächer
Mathematik und Informatik

seit 02/2000 Lehrer für die Fächer Mathematik und Informatik am städt. St.
Michael Gymnasium Monschau

seit 08/2003 Teilabordnung zum Lehrstuhl A f. Mathematik der RWTH
Aachen; Tätigkeiten in der Lehramtsausbildung