Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
Dipl.-Math. F. Bühler, Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 30.06.2000

10. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Freitag, 07.07.2000, bis 11.45 Uhr im Übungskasten)

<u>**Hinweise zur Klausur:**</u> Die **Klausur** findet statt am **Samstag, den 08.07.2000 von 9.00 Uhr bis 11.00 Uhr** im **Hörsaal Gr**, Wüllnerstr.9 Hörsaalgebäude. Erscheinen Sie bitte pünktlich und bringen Sie Schreibgerät, **Studenten- und Personalausweis** mit. Papier wird in ausreichender Menge zur Verfügung gestellt. Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
Klausurrückgabe ist Donnerstag, den 13.07.2000 um 13.30 Uhr im Hörsaal I.
Die **Nachschreibeklausur** findet statt am Montag, den **16.10.2000 von 9.00 Uhr bis 11.00 Uhr** im **Hörsaal I**, Hauptgebäude, Templergraben 55.

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass der topologische Raum $\mathbb{R}^*$ aus Aufgabe 2, 2. Übung normal und regulär ist. $\boxed{4}$

b) Zeigen Sie, dass der topologische Raum H aus Aufgabe 2, 2. Übung regulär, aber nicht normal ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $d(x,y) := \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$. Zeigen Sie:

a) d ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$, welche die natürliche Topologie induziert.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. $\boxed{4}$

b) Geben Sie eine Cauchy–Folge in $(\mathbb{R}, d)$ an, die nicht konvergiert.
Bedeutung: $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig. Vollständigkeit gehört also zu der Metrik und nicht zu der induzierten Topologie. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Seien $\mathcal{T}$ die Initialtopologie von $(X, (Y_i, f_i)_{i \in I})$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X sowie $x \in X$. Zeigen Sie:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad (f_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f_i(x) \quad \forall i \in I. \qquad \boxed{5}$$

$\boxed{\boxed{19}}$

Die Übungsblätter sind auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/SS00/Topologie

Maurice René Fréchet[1]

Born: 2 Sept 1878 in Maligny, Yonne, Bourgogne, France
Died: 4 June 1973 in Paris, France

Maurice Fréchet made major contributions to the topology of point sets and defined and founded the theory of abstract spaces.

Fréchet was a student of Hadamard's and, under his supervision, Fréchet wrote an outstanding dissertation in 1906, introducing the concept of a metric space. He did not invent the name 'metric space' which is due to Hausdorff.

A versatile mathematician, Fréchet served as professor of mechanics at the University of Poitiers (1910–19) and professor of higher calculus at the University of Strasbourg (1920–27). He held several different positions in the field of mathematics at the University of Paris (1928–48) including lecturer of the calculus of probabilities, professor of differential and integral calculus and professor of the calculus of probabilities.

Fréchet made major contributions to the topology of point sets and defined and founded the theory of abstract spaces. Fréchet also made important contributions to statistics, probability and calculus. In his dissertation of 1906, mentioned above, he investigated functionals on a metric space and formulated the abstract notion of compactness.

In 1907 he discovered an integral representation theorem for functionals on the space of quadratic Lebesgue integrable functions. A similar result was discovered independently by Riesz.

Fréchet's most important work includes

(i) *Les Espaces abstrait* (1928),
(ii) *Récherchés théoretiques modernes sur la théorie des probabilités (1937–38)*,
(iii) *Pages choisies d'analyse générale* (1953),
(iv) *Les Mathématiques et le concret* (1955).

[1] Aus: 'The MacTutor History of Mathematics archive' der University of St Andrews, Scotland.