LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner

Aachen, den 10. Mai 2001

4. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 18.05.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } \quad z = x + iy \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } \quad z = 0. \end{cases}$$

In welchen Punkten sind die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt? In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar?

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Zeige, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \begin{cases} z^2 & , \quad z \in \mathbb{R} \\ 0 & , \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \end{cases}$$

in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber nicht holomorph ist.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte):
Man bestimme bei den folgenden Abbildungen das Bild $f(G)$ und überprüfe, ob die Abbildungen $f : G \to f(G)$ biholomorph sind.

a) $f(z) = z^2$ und $G = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$,

b) $f(z) = 1 - \frac{4z}{(1+z)^2}$ und $G = K_1(0)$.

Aufgabe 4 (2+2+1+1+2+2+2+2 Punkte):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Man zeige für $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei mal reell differenzierbare Funktionen, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion die folgenden Rechenregeln für die Wirtingerableitungen:

a) $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ erfüllen die Produktregel $((fg)' = f'g + g'f)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}$.

c) Ist f reell, so ist $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$.

d) Ist f holomorph, so gilt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, ist $\bar{f}$ holomorph, so gilt $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

e) $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$.

f) $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$.

g) $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f\right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f\right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$.

h) $\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ \varphi\right) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}$.