Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg, A. Marschner Aachen, den 21. Juni 2001

9. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Freitag, 29.06.2001, 13.00 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte):
Sei $D = \{z \in \mathbb{C};\ z \neq -k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, und auf D sei die folgende Funktion gegeben:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!(z+k)} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Beweisen Sie:

a) f ist auf D wohldefiniert.

b) f ist auf D holomorph.

c) $f(z)$ stimmt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ mit der komplexen Gammafunktion $\Gamma(z)$ überein.

d) Es giltf $f(z+1) = zf(z)$ für alle $z \in D$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Es sei G ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$, und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Desweiteren haben die f_n alle eine Stammfunktion F_n. Zeigen Sie, dass dann auch f eine Stammfunktion besitzt. Gilt diese Aussage auch für nicht-konvexe Gebiete?

Aufgabe 3 (3+3 Punkte):

a) Man bestimme das Maximum (und wo es angenommen wird) von $|f(z)|$ mit $f(z) = z^2+z-1$ für $|z| \leq 1$, $\mathrm{Re}z \geq 0$.

b) Die Funktion $g : K_2(0) \to \mathbb{C}$, $K_2(0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 2\}$ sei holomorph mit $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$. Man bestimme das Maximum von $|g(z)|$ auf $K_2(0)$ und die Stellen, an denen es angenommen wird.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für ein offenes Dreieck Δ zeige man:

$$n_{\partial\Delta}(z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in \Delta \\ 0 & , \quad z \in \mathbb{C}\backslash\overline{\Delta} \end{cases} .$$

Aufgabe 5 (L, 3+3 Punkte):

a) Gegeben sei für $a, b > 0$ die Ellipse

$$E := \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}.$$

Geben Sie eine Parametrisierung eines Zyklus γ an, so dass gilt:

$$n_\gamma(z) = \begin{cases} 5 & , \quad z \in E \\ 0 & , \quad z \in \mathbb{C} \backslash \overline{E} \end{cases} .$$

b) Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ und sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$. Man zeige: $n_{g \circ \gamma}(0) = k \cdot n_\gamma(0)$.

Aufgabe 6 (Das komplexe Potential) (2+3+4*)
Man deutet eine holomorphe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ im Gebiet G als **komplexes Potential** eines ebenen, in G wirbel- und quellenfreien Strömungsfeldes mit reellem **Potential** $u(x, y)$, **Äquipotentiallinien** $u(x, y) = \text{const}$ und den **Stromlinien** $v(x, y) = \text{const}$.
Das Strömungsfeld (Geschwindigkeitsfeld) $\hat{q}(x, y) = (u_x, u_y)^t$ hat die komplexe Darstelllung $q = q_1 + iq_2$.

a) Wo befinden sich Staupunkte? Man drücke q mit Hilfe von f aus.

b) Man zeige, dass die Äquipotentiallinien und Stromlinien in Nichtstaupunkten orthogonal sind. Dazu zeige man zunächst:

Satz: Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ in G. Dann ist f konform, d. h. winkeltreu und orientierungstreu, d. h. der Schnittwinkel zwischen zwei stetig diffbaren Kurven durch $z \in G$ ist samt Drehsinn der gleiche wie für die beiden Bildkurven durch $f(z)$. Dabei sei für zwei stetig diffbare Wege im Schnittpunkt z_0 ($\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$) der (orientierte) Winkel als $\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) := \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$ definiert.

c) Man berechne und skizziere Geschwindigkeitsfeld, Potentiallinien und Stromlinien für

(i) (Parallelströmung)

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = v_0 e^{-i\alpha} z, \quad v_0, \alpha \in \mathbb{R}$$

(ii) (Quellströmung)

$$f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = k \operatorname{Log}(z - a), \quad k > 0$$

(iii) (Zirkulationsströmung)

$$f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = -ki \operatorname{Log}(z - a), \quad k > 0$$

(iv) (Dipolströmung)

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^{-1}.$$